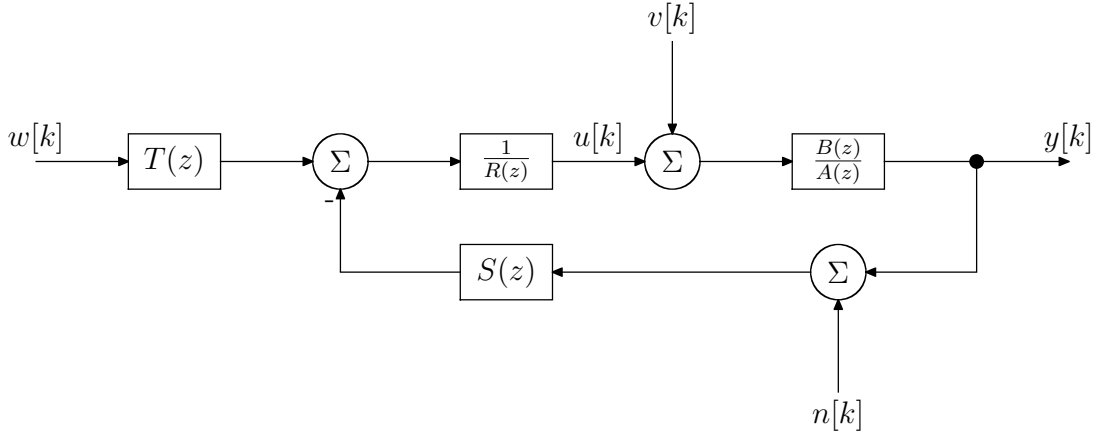


Chapitre 3

Régulateur RST polynômial

FIG. 3.1 – Structure du régulateur RST ([fichier source](#)).

3.1 Régulateur RST polynomial

3.1.1 Structure du régulateur RST [5] [6]

Un système asservi par un régulateur RST a la structure définie sur la figure 3.1. Toutes les lettres situées dans des blocs désignent des polynômes en z et non des fonctions de transfert. La figure 3.2 page ci-contre montre un schéma équivalent où les blocs correspondent cette fois à des fonctions de transfert causales (voir également l'équation (3.17)). Dans ce schéma, on a tenu compte de l'existence de bruit $n(k)$ sur la grandeur réglée mesurée. On remarque que l'on ne considère que des signaux discrets, aussi bien pour le bruit que pour les perturbations. De même, c'est le modèle échantillonné du système à régler qui est employé

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = (1 - z^{-1}) \cdot \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{G_a(s)}{s} \right) \right\}$$

où $G_a(s)$ est le modèle analogique du système à régler. On part de l'hypothèse que $A(z)$ et $B(z)$ n'ont pas de facteur commun, i.e. les simplifications pôles-zéro on été faites.

3.1.2 Fonctions de transfert

Les fonctions de transfert suivantes peuvent être calculées :

Système à régler

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (3.1)$$

Boucle ouverte

$$G_o(z) = \frac{S(z) \cdot B(z)}{R(z) \cdot A(z)} \quad (3.2)$$

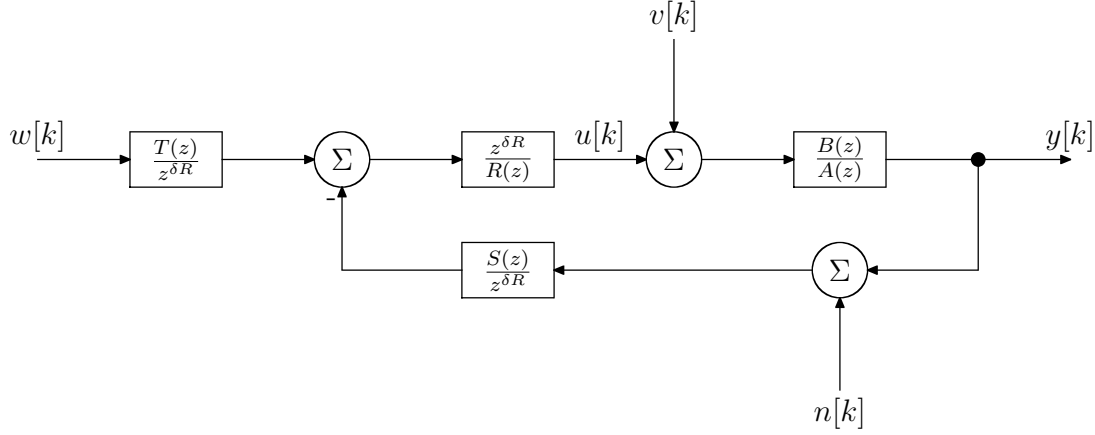


FIG. 3.2 – Structure du régulateur RST. δR est l'ordre du polynôme $R(z)$ (fichier source).

Régulation de correspondance

$$G_w(z) = \frac{Y(z)}{W(z)} = \frac{\frac{T(z)}{R(z)} \cdot \frac{B(z)}{A(z)}}{1 + G_o(z)} = \frac{\frac{T(z)}{R(z)} \cdot \frac{B(z)}{A(z)}}{1 + \frac{S(z) \cdot B(z)}{R(z) \cdot A(z)}} = \frac{B(z) \cdot T(z)}{A(z) \cdot R(z) + B(z) \cdot S(z)} = \frac{B_m(z)}{A_m(z)} \quad (3.3)$$

Régulation de maintien

$$G_v(z) = \frac{Y(z)}{V(z)} = \frac{\frac{B(z)}{A(z)}}{1 + G_o(z)} = \frac{\frac{B(z)}{A(z)}}{1 + \frac{S(z) \cdot B(z)}{R(z) \cdot A(z)}} = \frac{B(z) \cdot R(z)}{A(z) \cdot R(z) + B(z) \cdot S(z)} \quad (3.4)$$

Réjection des perturbations (bruit $n[k]$)

$$G_n(z) = \frac{Y(z)}{N(z)} = \frac{\frac{S(z)}{R(z)} \cdot \frac{B(z)}{A(z)}}{1 + \frac{S(z) \cdot B(z)}{R(z) \cdot A(z)}} = \frac{B(z) \cdot S(z)}{A(z) \cdot R(z) + B(z) \cdot S(z)} \quad (3.5)$$

3.1.3 Forme des polynômes et contraintes

Les performances en asservissement sont spécifiées par le modèle en boucle fermée

$$G_w(z) = \frac{Y(z)}{W(z)} = \frac{B_m(z)}{A_m(z)} = H_m(z) \quad (3.6)$$

lequel peut être fixé dès le début du projet sur la base d'informations comme la durée de réglage T_{reg} , la bande passante en boucle fermée $\omega_{-3\text{dB}}$, la précision en poursuite de consigne et en réjection des perturbations, le taux de dépassement de

la réponse indicielle autorisé, etc. Si l'on souhaite un comportement apériodique en boucle fermée avec une durée de réglage T_{reg} , il suffira alors de poser

$$A_m(z) \propto (z - p_{f1}) = \left(z - e^{-\frac{h}{T_{\text{reg}}}} \right) \quad (3.7)$$

Le polynôme $B(z)$ détermine les zéros du système à régler. Il est dans le cas général envisageable de les compenser, à condition toutefois que l'on se limite aux zéros de $B(z)$ situés dans le disque unité (voir § ?? page ??). Des conditions plus drastiques d'amortissement absolu et relatif peuvent également être imposées. En désignant par $B^+(z)$ le polynôme monique facteur de $B(z)$ dont les racines répondent à cette condition, on peut alors écrire $B(z)$ comme

$$B(z) = B^+(z) \cdot B^-(z) \quad (3.8)$$

Le polynôme $B_m(z)$ devra ainsi contenir le terme $B^-(z)$ afin de s'assurer qu'aucun zéro hors du disque unité, voire hors d'une zone plus restrictive spécifiée par des conditions d'amortissement absolue et relative, n'ait été compensé :

$$B_m(z) = B^-(z) \cdot B'_m(z) \quad (3.9)$$

Si le polynôme $B^+(z)$ est compensé, la seule possibilité est qu'il le soit par des zéros de $R(z)$ puisque $A(z)$ et $B(z)$ n'ont par hypothèse pas de facteurs communs :

$$G_o(z) = \frac{S(z)}{R(z)} \cdot \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{S(z)}{B^+(z) \cdot R'(z)} \cdot \frac{B^+(z) \cdot B^-(z)}{A(z)} = \frac{S(z) \cdot B^-(z)}{R'(z) \cdot A(z)}$$

On en déduit que

$$R(z) = B^+(z) \cdot R'(z) \quad (3.10)$$

En réécrivant la fonction de transfert en boucle fermée, régulation de correspondance, on a :

$$\begin{aligned} H_m(z) &= \frac{Y(z)}{W(z)} = \frac{B(z) \cdot T(z)}{A(z) \cdot R(z) + B(z) \cdot S(z)} \\ &= \frac{B^-(z) \cdot B^+(z) \cdot T(z)}{A(z) \cdot B^+(z) \cdot R'(z) + B^+(z) \cdot B^-(z) \cdot S(z)} \\ &= \frac{B^-(z) \cdot T(z)}{A(z) \cdot R'(z) + B^-(z) \cdot S(z)} \end{aligned}$$

D'autre part, selon (3.3) et (3.9) :

$$H_m(z) = \frac{B_m(z)}{A_m(z)} = \frac{B^-(z) \cdot B'_m(z)}{A_m(z)}$$

On en déduit :

$$\frac{B^-(z) \cdot T(z)}{A(z) \cdot R'(z) + B^-(z) \cdot S(z)} = \frac{B^-(z) \cdot B'_m(z)}{A_m(z)} = \frac{B^-(z) \cdot B'_m(z)}{A_m(z)} \cdot \frac{A_o(z)}{A_o(z)}$$

Le polynôme $A_o(z)$ porte le nom de *polynôme observateur* : il permet de tenir compte du fait que si

$$\frac{7}{4} = \frac{7}{4} \cdot \frac{3}{3} = \frac{21}{12}$$

on ne peut cependant évaluer directement les numérateurs et dénominateurs de chacune des fractions. Dans le cas de l'exemple, $A_o(z) = 3$.

Pour la synthèse du régulateur, i.e la détermination des polynômes $R(z)$, $S(z)$ et $T(z)$ à partir des polynômes $A(z)$, $B(z)$, $A_m(z)$ et $B_m(z)$, les équations suivantes sont donc à résoudre :

$$A(z) \cdot R'(z) + B^-(z) \cdot S(z) = A_o(z) \cdot A_m(z) \quad (3.11)$$

$$T(z) = A_o(z) \cdot B'_m(z) \quad (3.12)$$

Si une compensation des perturbations d'ordre j est spécifiée, il suffit d'inclure dans $G_o(z)$ le nombre $l = j + 1$ correspondant d'intégrateurs. S'inspirant de la démarche ayant conduit à l'équation (3.10), ceci se fait en imposant que $R(z)$ ait la forme :

$$R(z) = B^+(z) \cdot (z - 1)^l \cdot R'(z) \quad (3.13)$$

3.1.4 Calcul de $R(z)$ et $S(z)$

Condition d'existence de solutions uniques

Le calcul de $R(z)$ et $S(z)$ passe par la résolution de l'équation de *Diophantine*

$$A(z) \cdot X(z) + B(z) \cdot Y(z) = C(z) \quad (3.14)$$

où $A(z)$, $X(z)$, $B(z)$, $Y(z)$ et $C(z)$ sont des polynômes. $A(z)$, $B(z)$ et $C(z)$ sont connus, $X(z)$ et $Y(z)$ sont les polynômes à déterminer. Il est clair qu'une telle équation possède une infinité de solutions. Cependant, on peut démontrer que l'équation (3.14) a des solutions uniques si (la notation δX signifie "degré du polynôme X ")

$$\delta Y < \delta A \quad (3.15)$$

i.e. si le degré du polynôme $Y(z)$ est strictement inférieur à celui du polynôme $A(z)$. Dans le cas du régulateur RST, une équation de la même forme est justement obtenue lorsque l'on considère le dénominateur $A(z) \cdot R'(z) + B^-(z) \cdot S(z) = A_o(z) \cdot A_m(z)$ de la fonction de transfert en boucle fermée. En multipliant les 2 membres par $B^+(z)$, on a :

$$A(z) \cdot R(z) + B(z) \cdot S(z) = B^+(z) \cdot A_o(z) \cdot A_m(z) \quad (3.16)$$

Contraintes sur les degrés des polynômes

Si (3.15) est respectée, l'on sait que (3.16) a une solution unique offrant les polynômes $R(z)$ et $S(z)$ recherchés : encore faut-il chercher une solution pour ceux-ci telle que leurs degrés soient compatibles avec les contraintes contenues implicitement dans (3.16). Il faut par exemple que le degré du polynôme du membre de gauche, résultant de la somme de produits $A(z) \cdot R(z) + B(z) \cdot S(z)$ soit équivalent à celui du membre de droite, résultant du produit $B^+(z) \cdot A_o(z) \cdot A_m(z)$. C'est la liste des ces contraintes qui est développée dans ce paragraphe.

Il faut commencer par prendre en compte les contraintes de causalité des fonctions de transfert du système à régler, régulateur et du modèle à poursuivre :

$$\delta R \geq \delta S \quad (3.17)$$

$$\delta R \geq \delta T \quad (3.18)$$

$$\delta A > \delta B \quad (3.19)$$

$$\delta A_m - \delta B_m \geq \delta A - \delta B \quad (3.20)$$

Degré du polynôme $R(z)$ En examinant (3.16), avec (3.19) et (3.17), on a :

$$\delta R + \delta A > \delta B + \delta S$$

Ainsi :

$$\delta R + \delta A = \delta B^+ + \delta A_o + \delta A_m$$

d'où

$$\delta R = \delta B^+ + \delta A_o + \delta A_m - \delta A \quad (3.21)$$

Degré du polynôme $T(z)$ Comme

$$T(z) = A_o(z) \cdot B'_m(z)$$

on peut écrire

$$\delta T = \delta A_o + \delta B'_m$$

Degré du polynôme $A_m(z)$ On peut alors écrire, sachant que selon (3.18) $\delta R \geq \delta T$:

$$\underbrace{\delta B^+ + \delta A_o + \delta A_m - \delta A}_{\delta R} \geq \underbrace{\delta A_o + \delta B'_m}_{\delta T}$$

et finalement :

$$\delta A_m \geq \delta B'_m - \delta B^+ + \delta A \quad (3.22)$$

Degré des polynômes $S(z)$ et $A_o(z)$ Il reste à déterminer les degrés des polynômes $S(z)$ et $A_o(z)$. Pour $S(z)$, on prendra simplement, selon l'équation (3.15) :

$$\delta S = \delta A - 1 \quad (3.23)$$

Pour $A_o(z)$, la prise en compte des équations (3.17), (3.21) et (3.23) permet de calculer :

$$\begin{aligned} \delta R &\geq \delta S \\ \underbrace{\delta B^+ + \delta A_o + \delta A_m - \delta A}_{\delta R} &\geq \underbrace{\delta A - 1}_{\delta S} \end{aligned}$$

d'où :

$$\delta A_o \geq 2 \cdot \delta A - \delta A_m - \delta B^+ - 1 \quad (3.24)$$

Résumé

En résumé, pour la synthèse du régulateur RST, on s'arrangera pour respecter, dans l'ordre, les conditions suivantes :

Choisir $B'_m(z)$ selon les contraintes en poursuite de consigne
 $\delta A_m \geq \delta B'_m - \delta B^+ + \delta A$
 $\delta A_o \geq 2 \cdot \delta A - \delta A_m - \delta B^+ - 1$
 $\delta R = \delta B^+ + \delta A_o + \delta A_m - \delta A$
 $\delta S = \delta A - 1$
 $\delta T = \delta A_o + \delta B'_m$

Ces contraintes étant respectées, une solution unique causale (i.e. réalisable) peut être trouvée en résolvant l'équation de Diophantine. Celle-ci aura alors la forme :

$$A(z) \cdot R(z) + B(z) \cdot S(z) = B^+(z) \cdot A_o(z) \cdot A_m(z)$$

On trouvera les coefficients des polynômes $R'(z)$ et $S(z)$ d'une manière aisée si l'on construit la matrice de Sylvester, comme indiqué au § 3.1.5 page suivante. Il faut remarquer qu'on a imposé que les zéros stables et bien amortis de B , soit ceux du polynômes $B^+(z)$ soient compensés par $R(z)$, qui a alors la forme générale :

$$R(z) = B^+(z) \cdot R'(z)$$

3.1.5 Calcul des polynômes $R(z)$ et $S(z)$: matrice de Sylvester [[5], §10.3.3]

Les polynômes $R(z)$, $S(z)$, $A(z)$, $B(z)$ et $C(z) = B^+(z) \cdot A_o(z) \cdot A_m(z)$ ont pour formes :

$$\begin{aligned} R(z) &= z^{\delta R} + r_1 \cdot z^{\delta R-1} + r_2 \cdot z^{\delta R-2} + \dots + r_{\delta R-1} \cdot z + r_{\delta R} \\ S(z) &= s_0 \cdot z^{\delta S} + s_1 \cdot z^{\delta S-1} + s_2 \cdot z^{\delta S-2} + \dots + s_{\delta S-1} \cdot z + s_{\delta S} \\ C(z) &= z^{\delta C} + c_1 \cdot z^{\delta C-1} + c_2 \cdot z^{\delta C-2} + \dots + c_{\delta C-1} \cdot z + c_{\delta C} \\ B(z) &= b_0 \cdot z^{\delta B} + b_1 \cdot z^{\delta B-1} + b_2 \cdot z^{\delta B-2} + \dots + b_{\delta B-1} \cdot z + b_{\delta B} \\ A(z) &= z^{\delta A} + a_1 \cdot z^{\delta A-1} + a_2 \cdot z^{\delta A-2} + \dots + a_{\delta A-1} \cdot z + a_{\delta A} \end{aligned}$$

En écrivant :

$$A(z) \cdot R(z) + B(z) \cdot S(z) = \overbrace{B^+(z) \cdot A_o(z) \cdot A_m(z)}^{C(z)}$$

on a dans le détail :

$$\begin{aligned} & (z^{\delta A} + a_1 \cdot z^{\delta A-1} + a_2 \cdot z^{\delta A-2} + \dots + a_{\delta A-1} \cdot z + a_{\delta A}) \cdot (z^{\delta R} + r_1 \cdot z^{\delta R-1} + r_2 \cdot z^{\delta R-2} + \dots + r_{\delta R-1} \cdot z + r_{\delta R}) \\ & + (b_0 \cdot z^{\delta B} + b_1 \cdot z^{\delta B-1} + b_2 \cdot z^{\delta B-2} + \dots + b_{\delta B-1} \cdot z + b_{\delta B}) \cdot (s_0 \cdot z^{\delta S} + s_1 \cdot z^{\delta S-1} + s_2 \cdot z^{\delta S-2} + \dots + s_{\delta S-1} \cdot z + s_{\delta S}) \\ & = z^{\delta C} + c_1 \cdot z^{\delta C-1} + c_2 \cdot z^{\delta C-2} + \dots + c_{\delta C-1} \cdot z + c_{\delta C} \end{aligned}$$

En identifiant terme à terme (de mêmes degrés), on peut montrer que l'on aboutit à un système d'équations linéaires représentable par la *matrice de Sylvester* :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_1 & \ddots & 0 & b_0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & a_2 & \ddots & 1 & b_1 & b_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_1 & b_2 & b_1 & \ddots & 0 \\ a_{\delta A-1} & \vdots & \ddots & a_2 & \vdots & b_2 & \ddots & b_0 \\ a_{\delta A} & a_{\delta A-1} & \ddots & \vdots & b_{\delta B} & \vdots & \ddots & b_1 \\ 0 & a_{\delta A} & \ddots & \vdots & 0 & b_{\delta B} & \ddots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{\delta A} & 0 & 0 & \dots & b_{\delta B} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{\delta R-1} \\ r_{\delta R} \\ s_0 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_{\delta S-1} \\ s_{\delta S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \\ \vdots \\ c_{\delta A-1} - a_{\delta A-1} \\ c_{\delta A} - a_{\delta A} \\ c_{\delta A+1} \\ c_{\delta A+2} \\ \vdots \\ c_{\delta R+\delta S-1} \\ c_{\delta R+\delta S} \end{bmatrix}$$

On en déduit les polynômes recherchés $R(z)$ et $S(z)$.

Exemple

On considère le système à régler de fonction de transfert :

$$G_a(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1 + s \cdot 0.1} \quad (3.25)$$

Le modèle échantillonné correspondant est, avec la période d'échantillonnage $h = 1$ [ms] :

$$\begin{aligned} H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} &= 10^{-5} \cdot \frac{0.4983 \cdot z + 0.4967}{z^2 - 1.99 \cdot z + 0.99} = \frac{4.9834 \cdot 10^6 \cdot (z + 0.9967)}{(z - 1) \cdot (z - 0.99)} \\ &= \frac{b_0 \cdot (z - z_1)}{z^2 + a_1 \cdot z + b_2} = \frac{b_0 \cdot z + b_1}{z^2 + a_1 \cdot z + b_2} = \frac{B(z)}{A(z)} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Les spécifications en boucle fermée préconisent d'avoir le modèle à poursuivre ayant

1. un comportement dynamique donné par les pôles $p_{f1} = 0.9$, $p_{f2} = 0.4$. On en déduit que

$$A_m(z) \propto (z - 0.9) \cdot (z - 0.4) = P(z)$$

Le degré δA_m de $A_m(z)$ étant à ce point indéterminé et comme $\delta P = 2$, on placera en principe le solde des pôles de $A_m(z)$ en $z = 0$:

$$A_m(z) = z^{\delta A_m - \delta P} \cdot P(z) = z^{\delta A_m - 2} \cdot (z - 0.9) \cdot (z - 0.4)$$

2. des performances en poursuite de consigne telles que l'on puisse suivre une consigne constante sans erreur. On en déduit que $H_m(1) = 1$. Sachant que

$$H_m(z) = \frac{B_m(z)}{A_m(z)} = \frac{B^- \cdot B'_m(z)}{A_m(z)}$$

on en déduit que

$$B'_m(1) = \frac{A_m(1)}{B^-(1)} = B'_m(z)$$

$A_m(z)$ et $B^-(z)$ étant imposés par ailleurs.

En décidant pour cette synthèse qu'aucun zéro du système à régler ne doit être compensé, ceci implique que $B^+(z) = 1$ et donc que $B^-(z) = b_0 \cdot (z - z_1)$. On

peut alors spécifier le modèle à poursuivre $H_m(z)$:

$$\begin{aligned}
 H_m(z) &= \frac{Y(z)}{W(z)} = \frac{B_m(z)}{A_m(z)} = \frac{B^- \cdot B'_m(z)}{A_m(z)} \\
 &= \frac{b_0 \cdot (z - z_1) \cdot \frac{A_m(1)}{B^-(1)}}{z^{\delta A_m - 2} \cdot (z - p_1) \cdot (z - p_2)} \\
 &= \frac{(1 - p_1) \cdot (1 - p_2)}{b_0 \cdot (1 - z_1)} \cdot \frac{b_0 \cdot (z - z_1)}{(z - p_1) \cdot (z - p_2)} \\
 &= \frac{(1 - 0.9) \cdot (1 - 0.4)}{4.9834 \cdot 10^6 \cdot (1 - 0.9967)} \cdot \frac{4.9834 \cdot 10^6 \cdot (z + 0.9967)}{z^{\delta A_m - 2} \cdot (z - 0.9) \cdot (z - 0.4)}
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

On remarque dans ce modèle à poursuivre que le zéro $z_1 = -0.9967$ du système à régler se retrouve bel et bien en boucle fermée, comme souhaité

On peut alors procéder au calcul des degrés des polynômes :

$$\text{Choisir } B'_m(z) \text{ selon les contraintes en poursuite de consigne} \rightarrow B'_m(z) = \frac{(1 - p_1) \cdot (1 - p_2)}{b_0 \cdot (1 - z_1)}$$

$$\tag{3.28}$$

$$\begin{aligned}
 \delta A_m &\geq \delta B'_m - \delta B^+ + \delta A && \rightarrow \delta A_m = 0 - 0 + 2 = 2 \\
 \delta A_o &\geq 2 \cdot \delta A - \delta A_m - \delta B^+ - 1 && \rightarrow \delta A_o = 2 \cdot 2 - 2 - 0 - 1 = 1 \\
 \delta R &= \delta B^+ + \delta A_o + \delta A_m - \delta A && \rightarrow \delta R = 0 + 1 + 2 - 2 = 1 \\
 \delta S &= \delta A - 1 && \rightarrow \delta S = 2 - 1 = 1 \\
 \delta T &= \delta A_o + \delta B'_m && \rightarrow \delta T = 1 + 0 = 1
 \end{aligned}$$

Les polynômes $R(z)$, $S(z)$, $A(z)$, $B(z)$ et $C(z) = B^+(z) \cdot A_o(z) \cdot A_m(z)$ ont alors pour formes :

$$R(z) = (z + r_1) \tag{3.29}$$

$$S(z) = (s_0 \cdot z + s_1) \tag{3.30}$$

$$A_o(z) = z \tag{3.31}$$

$$A_m(z) = (z^2 - (p_1 + p_2) \cdot z + p_1 \cdot p_2) \tag{3.32}$$

$$C(z) = 1 \cdot (z^2 - (p_1 + p_2) \cdot z + p_1 \cdot p_2) \cdot z \tag{3.33}$$

$$B(z) = (b_0 \cdot z + b_1) \tag{3.34}$$

$$B^+(z) = 1 \tag{3.35}$$

$$A(z) = (z^2 + a_1 \cdot z + a_2) \tag{3.36}$$

En écrivant :

$$A(z) \cdot R(z) + B(z) \cdot S(z) = \overbrace{B^+(z) \cdot A_o(z) \cdot A_m(z)}^{C(z)} \quad (3.37)$$

on a dans le détail :

$$\begin{aligned} (z^2 + a_1 \cdot z + a_2) \cdot (z + r_1) + (b_0 \cdot z + b_1) \cdot (s_0 \cdot z + s_1) \\ = 1 \cdot (z^2 - (p_1 + p_2) \cdot z + p_1 \cdot p_2) \cdot z \end{aligned} \quad (3.38)$$

L'identification terme à terme prend la forme :

$$\begin{aligned} z^3 : & \quad \quad \quad 1 = 1 \\ z^2 : & \quad \quad \quad r_1 + a_1 + b_0 \cdot s_0 = -p_1 - p_2 \\ z^1 : & \quad \quad \quad a_1 \cdot r_1 + a_2 + b_0 \cdot s_1 + b_1 \cdot s_0 = p_1 \cdot p_2 \\ z^0 : & \quad \quad \quad a_2 \cdot r_1 + b_1 \cdot s_1 = 0 \end{aligned}$$

soit encore

$$\begin{array}{lll} r_1 & + b_0 \cdot s_0 & = -p_1 - p_2 - a_1 \\ a_1 \cdot r_1 & + b_1 \cdot s_0 + b_0 \cdot s_1 & = p_1 \cdot p_2 - a_2 \\ a_2 \cdot r_1 & + b_1 \cdot s_1 & = 0 \end{array}$$

Ce système peut être écrit sous forme matricielle, faisant intervenir la matrice de Sylvester :

$$\begin{bmatrix} 1 & b_0 & 0 \\ a_1 & b_1 & b_0 \\ a_2 & 0 & b_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_1 \\ s_0 \\ s_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 - p_2 - a_1 \\ p_1 \cdot p_2 - a_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Avec $p_1 = 0.9$ et $p_2 = 0.1$, on a :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} r_1 \\ s_0 \\ s_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & b_0 & 0 \\ a_1 & b_1 & b_0 \\ a_2 & 0 & b_1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -p_1 - p_2 - a_1 \\ p_1 \cdot p_2 - a_2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0.4983 \cdot 10^{-5} & 0 \\ -1.99 & 0.4967 \cdot 10^{-5} & 0.4983 \cdot 10^{-5} \\ 0.99 & 0 & 0.4967 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -0.9 - 0.1 - (-1.99) \\ 0.9 \cdot 0.1 - 0.99 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.4741 \\ 1.0354 \cdot 10^{-5} \\ -9.4497 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

On a donc pour $R(z)$ et $S(z)$:

$$\begin{aligned} R(z) &= z + r_1 = z + 0.4741 \\ S(z) &= s_0 \cdot z + s_1 = 1.0354 \cdot 10^{-5} \cdot z - 9.4497 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

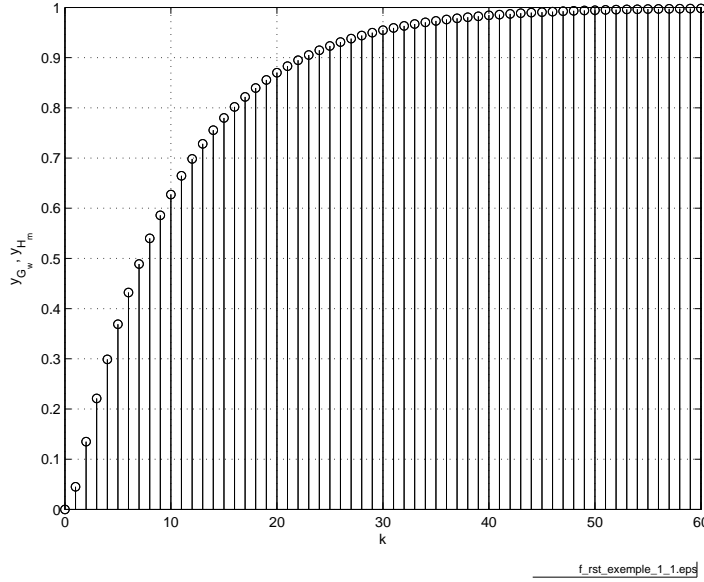


FIG. 3.3 – Réponses indicielles du modèle à poursuivre $H_m(z)$ et de la fonction de transfert effective en boucle fermée, régulation de correspondance, $G_w(z)$ ([fichier source](#)).

Pour $T(z)$, on a, selon (3.12), (3.28) et (3.31)

$$T(z) = B'_m(z) \cdot A_o(z) = \frac{(1 - p_1) \cdot (1 - p_2)}{b_0 \cdot (1 - z_1)} \cdot z = \frac{(1 - 0.9) \cdot (1 - 0.1)}{0.4983 \cdot 10^{-5} \cdot (1 - 0.9967)} \cdot z = 9.0451 \cdot 10^3 \cdot z$$

La figure 3.3 montre le résultat obtenu (réponse indicielle en boucle fermée, régulation de correspondance).

3.1.6 Commande a priori [[5], §10.6]

Le régulateur RST possède une commande a priori intrinsèque. En effet, on peut montrer que

$$\begin{aligned} U(z) &= \frac{T(z)}{R(z)} \cdot W(z) - \frac{S(z)}{R(z)} \cdot Y(z) \\ &= \frac{A(z)}{B(z)} \cdot \frac{B_m(z)}{A_m(z)} \cdot W(z) + \frac{S(z)}{R(z)} \cdot \left(\frac{B_m(z)}{A_m(z)} \cdot W(z) - Y(z) \right) \quad (3.39) \end{aligned}$$

Ceci correspond au schéma fonctionnel de la figure 3.4 page suivante, où la commande a priori est bien visible.

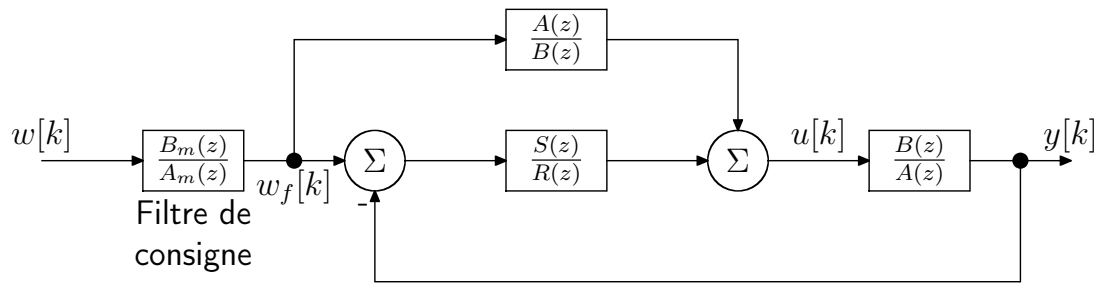


FIG. 3.4 – Mise en évidence de la commande a priori intrinsèque au régulateur RST ([fichier source](#)).