Ecole Nationale Supérieure de Physique de Strasbourg
2ème année

Commande Numérique des Systèmes
2ème partie

Jacques GANGLOFF
Et
Michel de MATHELIN

Programme de la deuxième partie

- Synthèse des correcteurs numériques
  - Objectifs (rappels)
  - Transposition à partir du continu (rappels et compléments)
  - Placement des pôles dominants
  - Prédicteur de Smith
  - Commande avec modèle interne
  - Synthèse algébrique : correcteurs RST
  - Analyse de la robustesse et des performances

Bibliographie – ouvrages en français

- E. Godoy et E. Ostertag, Commande numérique des systèmes. Ellipses, Collection Technosup, Paris, 2003.
- R. Longchamp, Commande numérique de systèmes dynamiques. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, 1995.
- E. Ostertag, Systèmes et asservissements continus. Ellipses, Collection Technosup, Paris, 2004.
- M. Rivoire et J.-L. Ferrier, Commande par calculateur et identification. Eyrolles, Paris, 1997.

Bibliographie – ouvrages en anglais

- K. Aström and B. Wittenmark, Computer controlled systems : theory and design.

  Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1984, 1990.
- G. Franklin, J. Powell, and A. Emami-Naeini, Feedback control of dynamic systems.

  Addison Wesley, Wokingham, 1988.
- G. Franklin, J. Powell, and L. Workman, Digital control of dynamic systems.

  Addison Wesley, Wokingham, 1989.
- T. Kailath, Linear Systems.

  Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1980.
- B. Kuo, Automatic control systems.

  Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1991.
- B. Kuo, Digital control systems.

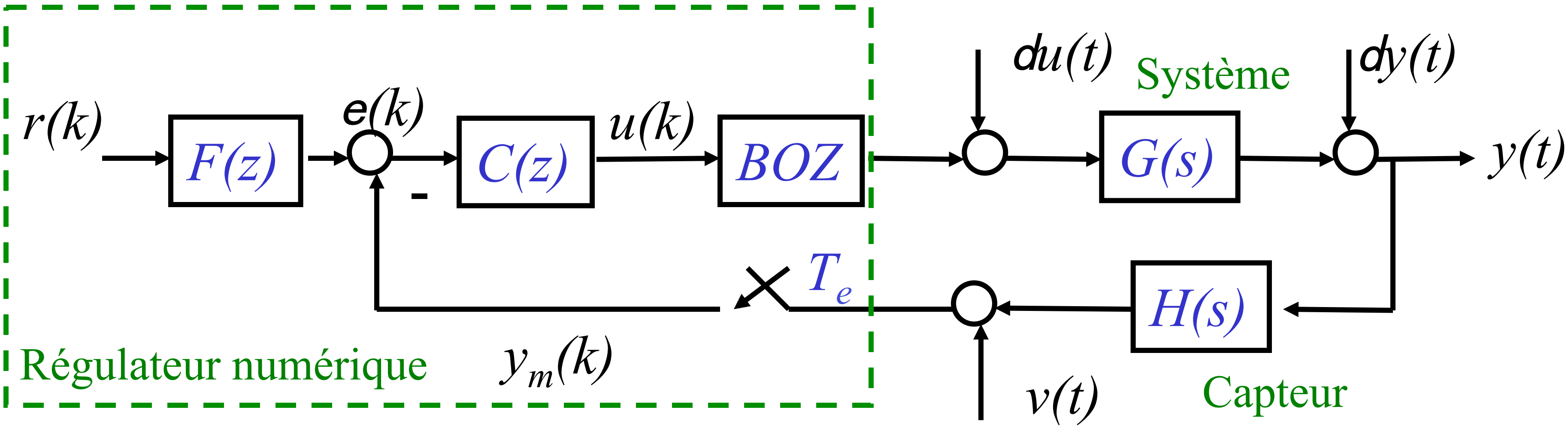
  Harcourt Brace & Jovanovich, Orlando, 1992.
- K. Ogata, Modern control engineering.

  Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1990.

Synthèse des correcteurs numériques

1 Objectifs – rappels (1)

- Asservissement numérique d'un système continu



$G(s)$	Fonction de transfert du système
$H(s)$	Fonction de transfert du capteur
r	Signal de consigne ou de référence
u	Signal de commande
y	Signal de sortie (grandeur à réguler)
y_m	Mesure de la sortie

du	Perturbation d'entrée
dy	Perturbation de sortie
v	Bruit de mesure
$C(z)$	Correcteur
$F(z)$	Préfiltre
e	Erreur d'asservissement

1 Objectifs – rappels (2)

- Objectifs de la synthèse:

Stabilité:

- Le système en boucle fermée est stable

Performance:

- Suivre les variations de la consigne
- Comportement en boucle fermée conforme à un modèle
- Rejeter les perturbations et le bruit

Robustesse:

- Conservation de la stabilité et des performances malgré les incertitudes sur le modèle (dynamiques non modélisées, non linéarités, incertitudes paramétriques, …)

Synthèse des correcteurs numériques

1 Objectifs – rappels (3)

- Outils pour la synthèse:

Stabilité:

- Critère de Jury
- Critère de Nyquist

Performance:

- Lieu d'Evans (placement des pôles de la boucle fermée)
- Calcul des erreurs en régime permanent
- Simulation (vérification a posteriori)

Robustesse:

- Marges de stabilité (diagramme de Nyquist)
- Simulation (vérification a posteriori)

Synthèse des correcteurs numériques

1 Objectifs – rappels (4)

- Méthodes simples pour la synthèse (monovariable):
  - Transposition de correcteurs continus
  - Utilisation de PID
  - Autoréglage
  - Placement de pôles (lieu d'Evans, retour d'état)
  - Modèle interne
  - Méthodes algébriques (RST)

- Méthodes avancées pour la synthèse (multivariable):
  - Commande optimale : minimalisation d'un critère quadratique sur l'erreur d'asservissement et la commande
  - Commande robuste : prise en compte optimale de bornes sur les incertitudes pour la stabilité et la performance
  - Commande non linéaire : prise en compte de modèles non linéaires du système à asservir

Synthèse des correcteurs numériques

2 Transposition à partir du continu (1)

- Principe:
  1. Synthèse d'un correcteur continu
  2. Le correcteur numérique est obtenu par approximation de la fonction de transfert du correcteur continu à l'aide d'équations aux différences. La façon la plus courante est de procéder à une transformation bilinéaire (Tustin transformation) par le changement de variable :

$$s \quad \rightarrow \quad \frac{2}{T_e} \frac{z-1}{z+1}$$

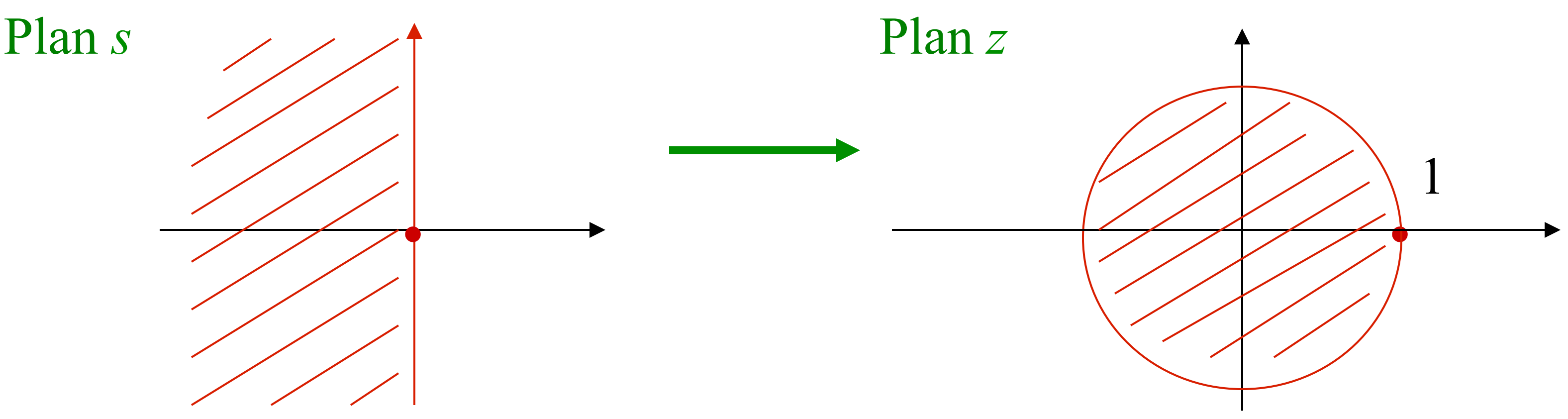
Synthèse des correcteurs numériques

2 Transposition à partir du continu (2)

- Approximation bilinéaire (homographique):

Dans la littérature anglo-saxonne: Tustin's approximation

$$s \quad \rightarrow \quad \frac{2}{T_e}\frac{z-1}{z+1}$$



$$\Leftrightarrow \quad C(z) = C_c\left(s = \frac{2}{T_e}\frac{z-1}{z+1}\right) \quad \Rightarrow$$

Conserve la stabilité et la forme de la réponse en fréquence

Synthèse des correcteurs numériques

2 Transposition à partir du continu (3)

- Conclusions:
  1. La méthode s'appuie sur les résultats d'une synthèse de correcteur analogique sur la base du modèle du système qui est également continu.
  2. La synthèse ne prend pas en compte le bloqueur et le déphasage introduit par celui-ci dans la boucle d'asservissement.
  3. Les performances du correcteur numériques seront au mieux celles du correcteur analogique.
  4. Les performances du correcteur numérique se rapprocheront d'autant plus de celles du correcteur analogique que la période d'échantillonnage est petite.

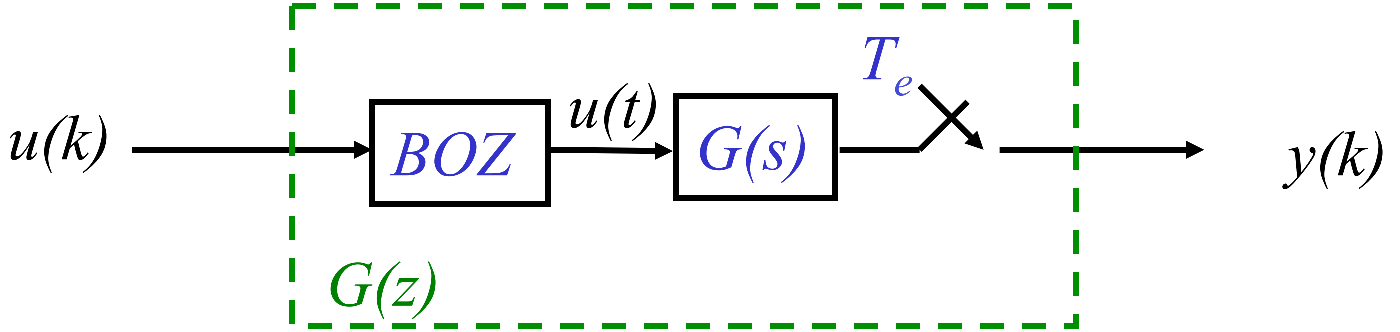
3 Prise en compte du bloqueur (1)

- Principe:
  1. La transmittance échantillonnée du système ouvert avec le bloqueur est calculée (fonction de transfert en z).
  2. Une transformation bilinéaire (transformation en w) est appliquée à cette transmittance échantillonnée pour obtenir une fonction transfert continue du système ouvert avec bloqueur.
  3. Une synthèse de correcteur analogique est réalisée sur cette fonction de transfert continue.
  4. Une transformation bilinéaire est appliquée au correcteur analogique synthétisé pour obtenir le correcteur numérique.

Synthèse des correcteurs numériques

3 Prise en compte du bloqueur (2)

1. Calcul de la transmittance échantillonnée du système ouvert :



2. Transformation bilinéaire :

$$z = \frac{1 + \frac{T_e}{2} w}{1 - \frac{T_e}{2} w} \Leftrightarrow w = \frac{2}{T_e} \frac{z-1}{z+1}$$

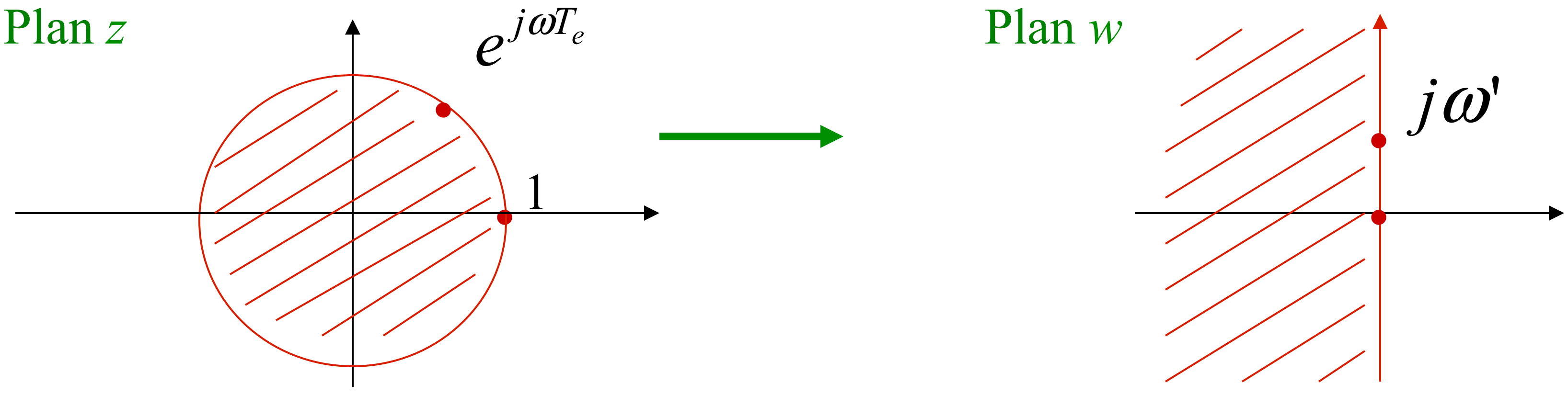
$$\Rightarrow \quad G_c(w) = G\left(z = \frac{1 + \frac{T_e}{2} w}{1 - \frac{T_e}{2} w}\right)$$

Conservation de la stabilité

Synthèse des correcteurs numériques

3 Prise en compte du bloqueur (3)

2. Transformation bilinéaire (suite) :



si z est sur le cercle unité alors

$$w = \frac{2}{T_e}\frac{e^{j\omega T_e}-1}{e^{j\omega T_e}+1} = \frac{2}{T_e}\frac{e^{j\frac{\omega T_e}{2}}-e^{-j\frac{\omega T_e}{2}}}{e^{j\frac{\omega T_e}{2}}+e^{-j\frac{\omega T_e}{2}}} = j\frac{2}{T_e}\tan\left(\omega\frac{T_e}{2}\right) = j\omega'$$

$$\Rightarrow \quad G_c(j\omega') = G(e^{j\omega T_e})$$

Conservation de la forme de la réponse en fréquence

Synthèse des correcteurs numériques

3 Prise en compte du bloqueur (4)

3. Synthèse d'un correcteur analogique :

$$\longrightarrow \boxed{C_c(w)} \longrightarrow \boxed{G_c(w)} \longrightarrow$$

La réponse en fréquence désirée doit prendre en compte la transformation des abscisses

4. Transformation bilinéaire :

$$w = \frac{2}{T_e}\frac{z-1}{z+1} \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{1+\frac{T_e}{2}w}{1-\frac{T_e}{2}w}$$

$$C(z) \quad = \quad C_c\left(w = \frac{2}{T_e}\frac{z-1}{z+1}\right)$$

Conservation de la stabilité et de la forme de la réponse en fréquence

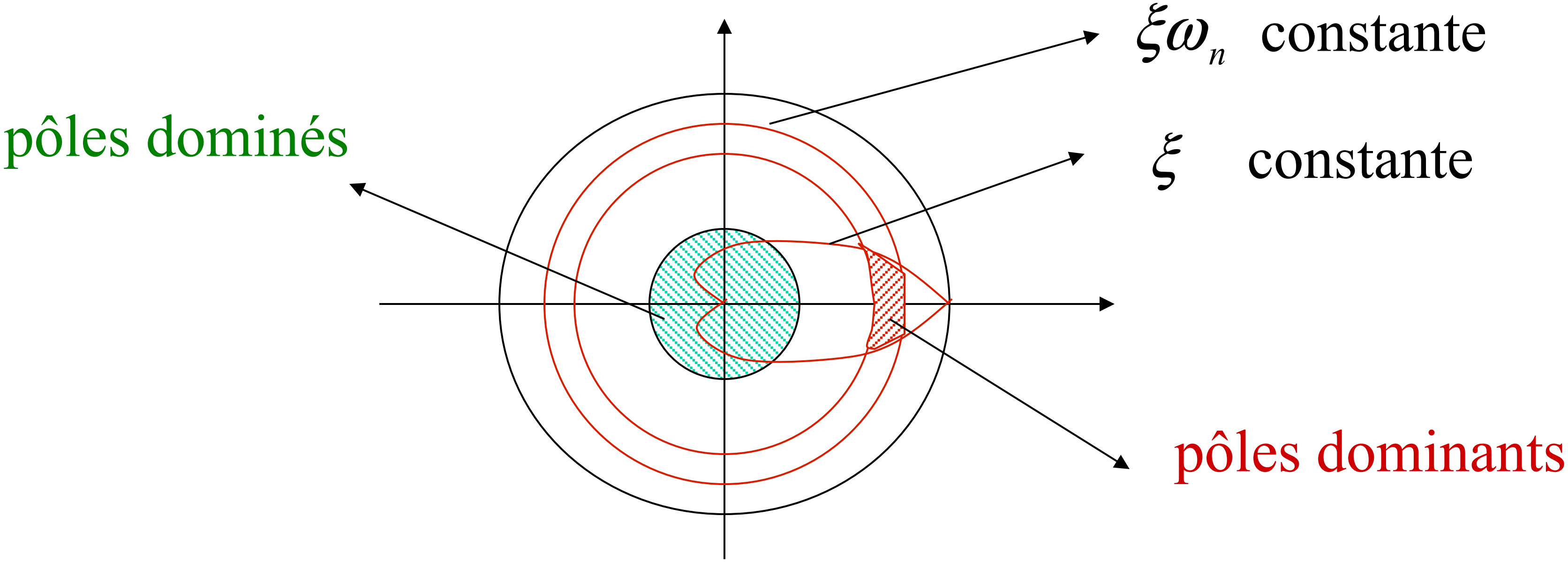
Quizz N°1 : 5 minutes

- https://goo.gl/yQNwdW

Synthèse des correcteurs numériques

4 Placement des pôles dominants

Principe: placer à l'aide du lieu d'Evans les pôles dominants de la fonction de transfert du système bouclé dans une région désirée

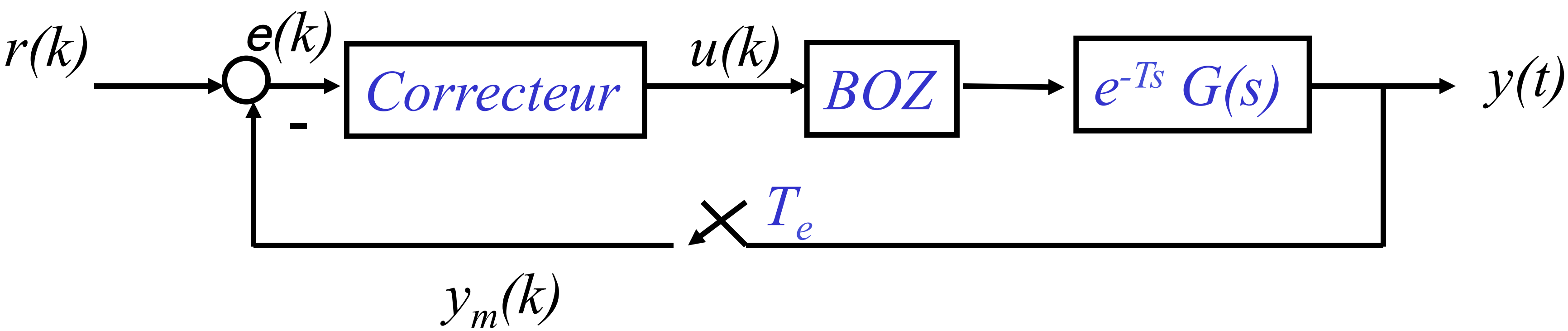


Pôles dominants: $s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n \quad \rightarrow \quad z_{1,2} = e^{-\xi\omega_n T_e} e^{\pm j\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n T_e}$

Synthèse des correcteurs numériques

5 Le prédicteur de Smith (1)

Synthèse particulière dans le cas des systèmes avec un retard important



Fonction de transfert du système (boucle ouverte): $= z^{-d}(1-z^{-1})Z\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$

avec $d = \dfrac{T}{T_e}$

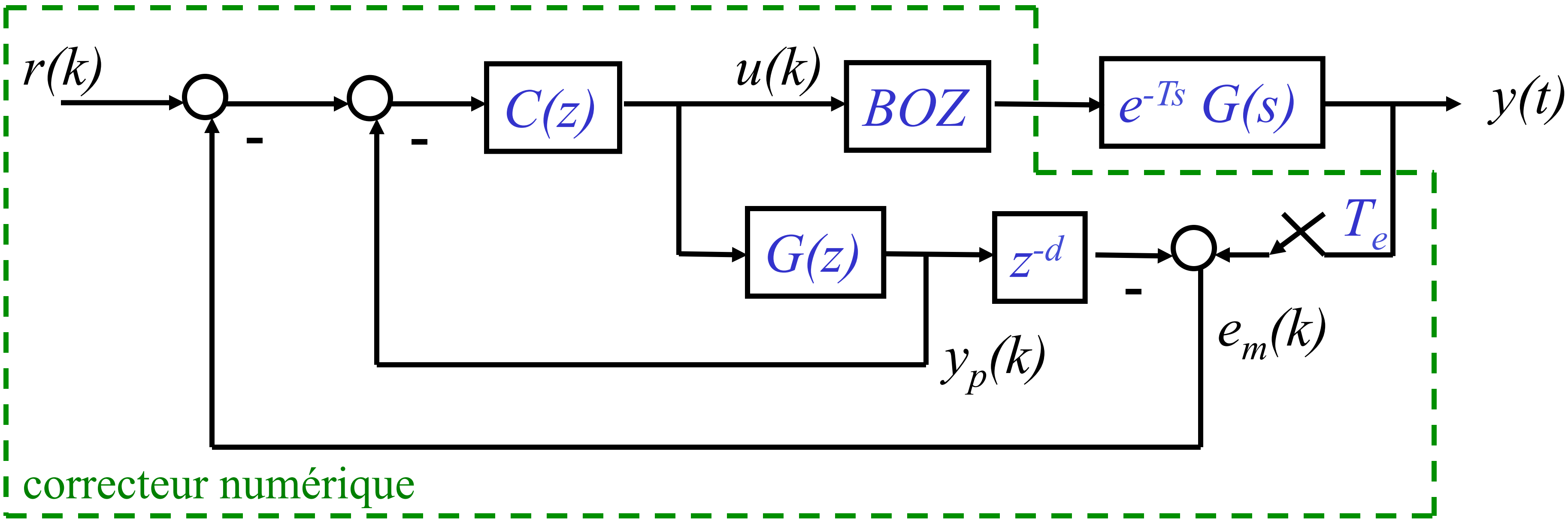
$$= z^{-d}G(z)$$

Nombre de pôles important et déphasage important

Synthèse des correcteurs numériques

5 Le prédicteur de Smith (2)

Principe: Asservir la sortie d'un modèle sans retard (prédicteur)



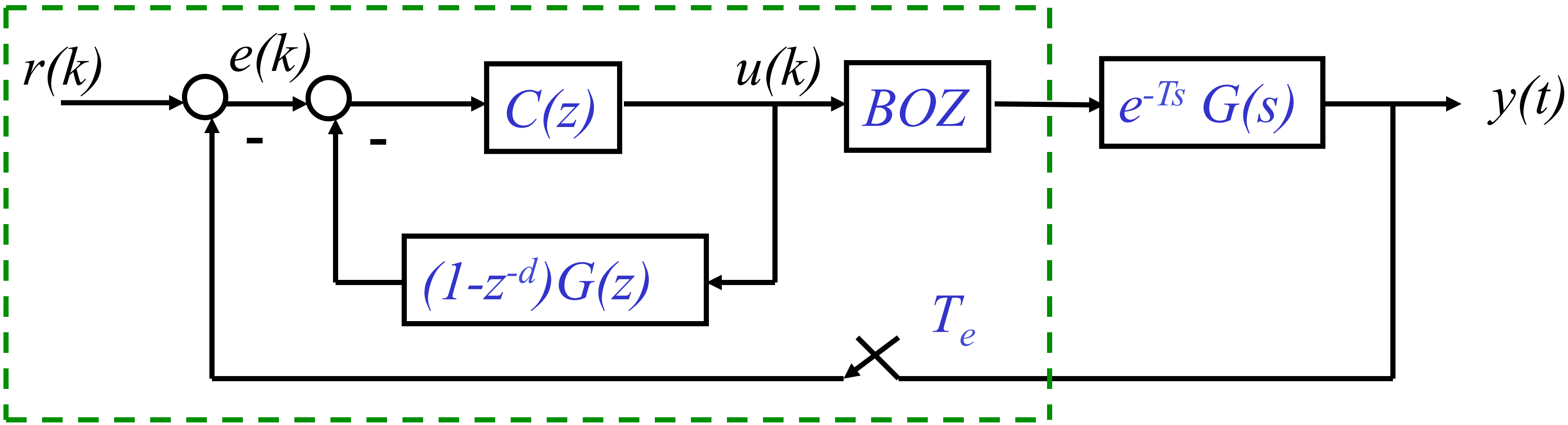
$y_p(k)$ est la prédiction de la sortie future : $y((k+d)T_e)$

$e_m(k)$ est renvoyé sur l'entrée pour compenser les perturbations et les erreurs de modèle

Synthèse des correcteurs numériques

5 Le prédicteur de Smith (3)

Schéma équivalent:



$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{C(z)}{1+(1-z^{-d})C(z)G(z)} \quad \Rightarrow \quad \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{z^{-d}C(z)G(z)}{1+C(z)G(z)}$$

$$\frac{Y_p(z)}{R(z)} = \frac{C(z)G(z)}{1+C(z)G(z)}$$

$\Rightarrow$ Le correcteur $C(z)$ est synthétisé sur le système sans retard

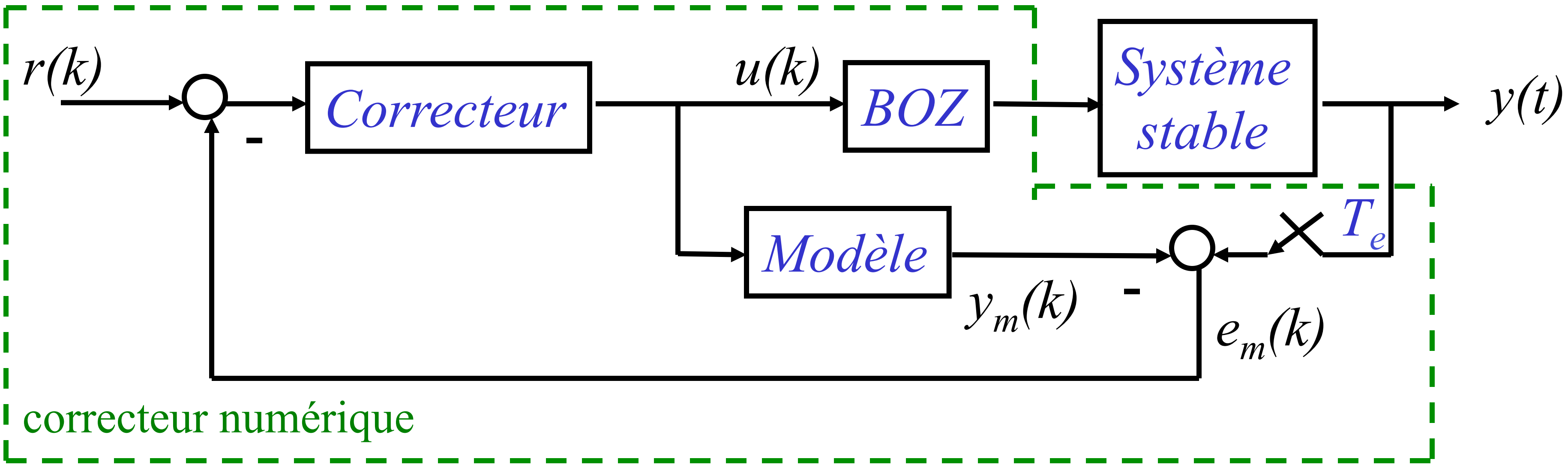
Quizz N°2 : 5 minutes

- https://goo.gl/OLtCii

Synthèse des correcteurs numériques

6 Commande avec modèle interne (1)

Principe: Rétroaction de l'écart entre le système et un modèle



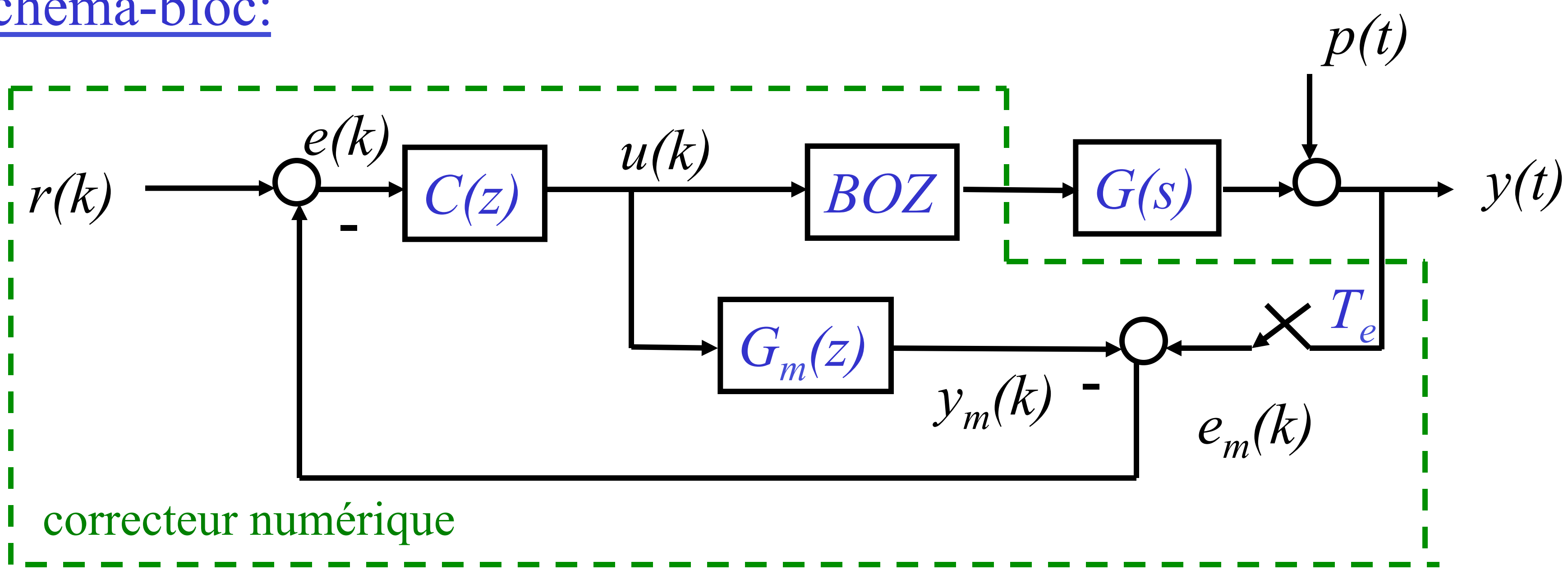
Si le modèle est parfait et s'il n'y a aucune perturbation, le signal de contre-réaction est nul

Si le correcteur est stable le système bouclé est stable

Synthèse des correcteurs numériques

6 Commande avec modèle interne (2)

Schéma-bloc:



Soit $G(z) = (1 - z^{-1}) Z\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$ stable et $P(z) = Z\{P(s)\}$

$$E(z) = \frac{1}{1 + C(z)\left(G(z) - G_m(z)\right)}\left(R(z) - P(z)\right)$$

Synthèse des correcteurs numériques

6 Commande avec modèle interne (3)

$$Y(z) = C(z)G(z)E(z) + P(z)$$

$$\Rightarrow \quad Y(z) = \frac{C(z)G(z)}{1 + C(z)\big(G(z) - G_m(z)\big)} R(z) + \frac{1 - C(z)G_m(z)}{1 + C(z)\big(G(z) - G_m(z)\big)} P(z)$$

Equivalence avec un correcteur série classique:

Soit $\quad F(z) = \dfrac{C(z)}{1 - C(z)G_m(z)} \Leftrightarrow C(z) = \dfrac{F(z)}{1 + F(z)G_m(z)}$

$$\Rightarrow \quad Y(z) = \frac{F(z)G(z)}{1 + F(z)G(z)} R(z) + \frac{1}{1 + F(z)G(z)} P(z)$$

Hypothèse du modèle parfait:

$G_m(z) = G(z) \quad \Rightarrow \quad Y(z) = C(z)G(z)R(z) + (1 - C(z)G(z))P(z)$

$\Rightarrow$ Si le correcteur est stable le système bouclé est stable

Synthèse des correcteurs numériques

6 Commande avec modèle interne (4)

Principes pour la synthèse du correcteur:

A. Hypothèse du modèle parfait

$G_m(z) = G(z) = G_I(z)G_{NI}(z)$ où $G_I(z)$ est la partie inversible de $G(z)$ et $G_{NI}(z)$ est la partie non inversible contenant les retards et les zéros non compensables

$$C(z) = Q(z)G_I^{-1}(z) \quad \text{avec} \quad Q(z) \text{ stable et } Q(1) = G_{NI}^{-1}(1)$$

$$Y(z) = Q(z)G_{NI}(z)R(z) + (1 - Q(z)G_{NI}(z))P(z)$$

Le système bouclé est stable, l'erreur de position est nulle et les perturbations constantes sont rejetées

Synthèse des correcteurs numériques

6 Commande avec modèle interne (5)

Principes pour la synthèse du correcteur (suite):

B. Cas général du modèle imparfait

$$G_m(z) = G_I(z)G_{NI}(z) \neq G(z)$$

où $G_I(z)$ est la partie inversible de $G_m(z)$ et $G_{NI}(z)$ est la partie non inversible

$$C(z) = Q(z)G_I^{-1}(z) \quad \text{avec} \quad Q(z) \text{ stable et } Q(1) = G_{NI}^{-1}(1)$$

$$Y(z) = \frac{Q(z)G_I^{-1}G(z)}{1+Q(z)\left(G_I^{-1}(z)G(z)-G_{NI}(z)\right)}R(z) + \frac{1-Q(z)G_{NI}(z)}{1+Q(z)\left(G_I^{-1}(z)G(z)-G_{NI}(z)\right)}P(z)$$

En pratique, si $Q(z)$ est un filtre passe-bas, de fréquence de coupure suffisamment petite alors le système bouclé est stable, l'erreur de position est nulle et les perturbations constantes sont rejetées

Synthèse des correcteurs numériques

6 Commande avec modèle interne (6)

Règles standards pour la synthèse du correcteur:

Soit

$$G_m(z) = \frac{g\prod_{i=1}^{m}(z-z_i)\prod_{j=1}^{p}(z-z_j)\prod_{k=1}^{q}(z-z_k)}{z^r\prod_{i=1}^{n}(z-p_i)} \quad \text{avec} \quad m+p+q<r+n$$

avec z_i les zéros à partie réelle positive à l'intérieur du cercle unité

z_j les zéros à partie réelle positive à l'extérieur du cercle unité

z_k les zéros à partie réelle négative

$$C(z) = Q(z)\frac{g_c\prod_{i=1}^{n}(z-p_i)}{z^q\prod_{i=1}^{m}(z-z_i)\prod_{j=1}^{p}(z-\frac{1}{z_j})}$$

$$C(1) = G_m^{-1}(1)$$

avec $Q(z) = \dfrac{(1-\alpha)z}{z-\alpha}$

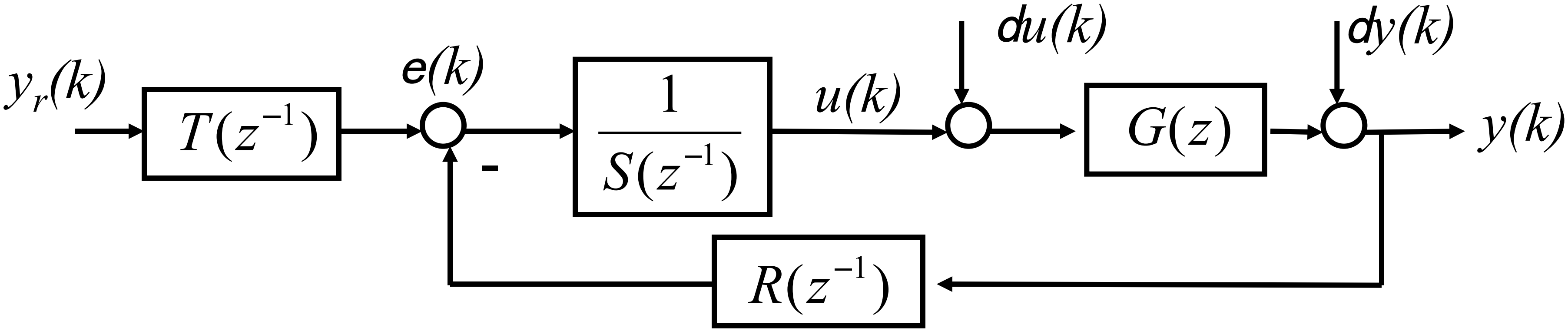
$$0<\alpha<1$$

Synthèse des correcteurs numériques

7 Synthèse algébrique (1)

7.1 Le correcteur RST:

A. Schéma



avec $R(z^{-1}), S(z^{-1}), T(z^{-1})$ polynômes en z^{-1}

et $S(z^{-1})$ monique $\Leftrightarrow$ $S(0)=1$

Soit $G(z)=\dfrac{z^{-d}B(z^{-1})}{A(z^{-1})}$ avec $B(z^{-1}), A(z^{-1})$ polynômes en z^{-1}

$d \geq 1$

premiers et $A(z^{-1})$ monique $\Leftrightarrow$ $A(0)=1$

Synthèse des correcteurs numériques

7 Synthèse algébrique (2)

B. Equations du système bouclé

$$Y(z) = \frac{z^{-d}B(z^{-1})}{A(z^{-1})}\left(U(z) + \delta U(z)\right) + \delta Y(z) \qquad (1)$$

$$U(z) = \frac{T(z^{-1})}{S(z^{-1})}Y_r(z) - \frac{R(z^{-1})}{S(z^{-1})}Y(z) \qquad (2)$$

$$Y(z) = \frac{z^{-d}BT}{AS + z^{-d}BR}Y_r(z) + \frac{z^{-d}BS}{AS + z^{-d}BR}\delta U(z) + \frac{AS}{AS + z^{-d}BR}\delta Y(z) \qquad (3)$$

$$U(z) = \frac{AT}{AS + z^{-d}BR}Y_r(z) - \frac{z^{-d}BR}{AS + z^{-d}BR}\delta U(z) - \frac{AR}{AS + z^{-d}BR}\delta Y(z) \qquad (4)$$

Synthèse des correcteurs numériques

7 Synthèse algébrique (3)

C. Objectifs de la synthèse

1. Le suivi de consigne obéit au modèle suivant:

$$M(z) = \frac{z^{-d} B_m(z^{-1})}{A_m(z^{-1})} \quad \text{avec} \quad M(1) = 1 \Leftrightarrow B_m(1) = A_m(1)$$

$\Rightarrow$ l'erreur de position est nulle

et $A_m(z^{-1})$ monique $\Leftrightarrow$ $A_m(0) = 1$

$$\Rightarrow \quad Y(z) = \frac{z^{-d} BT}{AS + z^{-d} BR} Y_r(z) = MY_r(z) = \frac{z^{-d} B_m}{A_m} Y_r(z) \qquad (5)$$

Exemples de modèle:

Modèle d'ordre 1 de constante de temps t: $A_m(z^{-1}) = 1 - \alpha z^{-1}$ avec $\alpha = e^{-\frac{T_e}{\tau}}$

Modèle d'ordre 2 de pulsation naturelle w_n et de facteur d'amortissement x:

$$A_m(z^{-1}) = 1 - 2\alpha\cos(\beta) z^{-1} + \alpha^2 z^{-2} \quad \text{avec} \quad \alpha = e^{-\xi\omega_n T_e} \quad \beta = \omega_n T_e \sqrt{1-\xi^2}$$

Synthèse des correcteurs numériques

7 Synthèse algébrique (4)

C. Objectifs de la synthèse (suite)

2. Rejet des perturbations d'entrée: $Y(z) = \dfrac{z^{-d}BS}{AS + z^{-d}BR}\delta U(z)$

Perturbation constante: $\delta U(z) = \dfrac{1}{1-z^{-1}}$ ⇒ $S(z^{-1}) = (1-z^{-1})S_1(z^{-1})$

Perturbation rampe: $\delta U(z) = \dfrac{T_e z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$ ⇒ $S(z^{-1}) = (1-z^{-1})^2 S_1(z^{-1})$

3. Rejet des perturbations de sortie: $Y(z) = \dfrac{AS}{AS + z^{-d}BR}\delta Y(z)$

Perturbation constante: ⇒ $A(z^{-1})S(z^{-1}) = (1-z^{-1})A_1(z^{-1})S_1(z^{-1})$

Perturbation rampe: ⇒ $A(z^{-1})S(z^{-1}) = (1-z^{-1})^2 A_1(z^{-1})S_1(z^{-1})$

⇒ Rejet des perturbations: $\exists p$ tel que $\boxed{S(z^{-1}) = (1-z^{-1})^p S_1(z^{-1}) \quad (6)}$

Synthèse des correcteurs numériques

7 Synthèse algébrique (5)

D. Compensation des pôles et des zéros

1. Compensation des zéros:

$$\frac{BT}{AS + z^{-d}BR} = \frac{B_m}{A_m} \qquad \text{cf. (5)}$$

Soit $B(z^{-1}) = B^+(z^{-1})B^-(z^{-1})$

avec $B^+(z^{-1})$ monique ⟺ $B^+(0) = 1$

contient les zéros que l'on souhaite compenser

$B^-(z^{-1})$ contient les zéros que l'on ne souhaite pas compenser
(zéros en dehors du cercle unité, zéros à partie réelle négative, …)

⇒ $$\boxed{S(z^{-1}) = B^+(z^{-1})S_0(z^{-1}) = (1 - z^{-1})^p B^+(z^{-1})S_2(z^{-1}) \qquad (7)}$$

⇒ $$Y(z) = \frac{z^{-d}B^-T}{AS_0 + z^{-d}B^-R}Y_r(z) + \frac{z^{-d}BS_0}{AS_0 + z^{-d}B^-R}\delta U(z) + \frac{AS_0}{AS_0 + z^{-d}B^-R}\delta Y(z)$$

Synthèse des correcteurs numériques

7 Synthèse algébrique (6)

D. Compensation des pôles et des zéros (suite)

$$\frac{B^-T}{AS_0 + z^{-d}B^-R} = \frac{B_m}{A_m}$$

2. Compensation des pôles:

cf. (5) et (7)

Soit $A(z^{-1}) = A^+(z^{-1})A^-(z^{-1})$

avec $A^+(z^{-1})$ monique
contient les pôles que l'on souhaite compenser

$A^-(z^{-1})$ monique
contient les pôles que l'on ne souhaite pas compenser
(pôles en dehors du cercle unité, pôles sur le cercle unité, …)

$$\boxed{R(z^{-1}) = A^+(z^{-1})R_0(z^{-1}) \quad \text{et} \quad T(z^{-1}) = A^+(z^{-1})T_0(z^{-1}) \qquad (8)}$$

$$Y(z) = \frac{z^{-d}B^-T_0}{A^-S_0 + z^{-d}B^-R_0}Y_r(z) + \frac{z^{-d}BS_0}{A^+(A^-S_0 + z^{-d}B^-R_0)}\delta U(z) + \frac{A^-S_0}{A^-S_0 + z^{-d}B^-R_0}\delta Y(z)$$

Synthèse des correcteurs numériques

7 Synthèse algébrique (7)

E. Calcul du correcteur RST

cf. (5), (6), (7) et (8)

$$\frac{B^- T_0}{A^- S_0 + z^{-d} B^- R_0} = \frac{B_m}{A_m}$$

Suivi de consigne

$$S_0(z^{-1}) = (1 - z^{-1})^p S_2(z^{-1})$$

Rejet de perturbation

⇒ B_m doit contenir B^- ⇒

$$\boxed{B_m = B^- B_m^+ \qquad (9)}$$

⇒

$$\frac{T_0}{A^- S_0 + z^{-d} B^- R_0} = \frac{B_m^+}{A_m}$$

⇒

$$\boxed{T_0(z^{-1}) = B_m^+(z^{-1}) A_0(z^{-1}) \qquad (10)}$$

Equations diophantiennes

$$\boxed{(1 - z^{-1})^p A^-(z^{-1}) S_2(z^{-1}) + z^{-d} B^-(z^{-1}) R_0(z^{-1}) = A_m(z^{-1}) A_0(z^{-1}) \quad (11)}$$

avec A_0 monique et stable, ajouté pour le filtrage des perturbations

Synthèse des correcteurs numériques

7 Synthèse algébrique (8)

F. Résolution des équations diophantiennes ⇒ R_0, S_2, T_0

$$(1-z^{-1})^p A^-(z^{-1})S_2(z^{-1}) + z^{-d}B^-(z^{-1})R_0(z^{-1}) = A_m(z^{-1})A_0(z^{-1}) \quad \text{Cf. (11)}$$

Soit
$$n = \deg\left\{(1-z^{-1})^p A^-(z^{-1})\right\}$$
$$m = \deg\left\{z^{-d}B^-(z^{-1})\right\}$$
$$q = \deg\left\{A_m(z^{-1})A_0(z^{-1})\right\}$$

• Si $q < n+m$ alors il existe une solution unique d'ordre minimal telle que $\deg\left\{S_2(z^{-1})\right\} = m-1$ et $\deg\left\{R_0(z^{-1})\right\} = n-1$

⇒ (11) est une équation polynomiale d'ordre $n+m-1$ avec $n+m$ coefficients inconnus

⇔ système de $n+m$ équations à $n+m$ inconnues

Synthèse des correcteurs numériques

7 Synthèse algébrique (9)

F. Résolution des équations diophantiennes (suite)

- Si $q \geq n+m$ alors il existe deux solutions d'ordre minimal telles que :

1. $\deg\{S_2(z^{-1})\} = m-1$ et $\deg\{R_0(z^{-1})\} = q-m$

2. $\deg\{S_2(z^{-1})\} = q-n$ et $\deg\{R_0(z^{-1})\} = n-1$

⇒ (11) est une équation polynomiale d'ordre q avec $q+1$ coefficients inconnus

⇔ système de $q+1$ équations à $q+1$ inconnues

Synthèse des correcteurs numériques

7 Synthèse algébrique (10)

F. Résolution des équations diophantiennes (suite)

- Si S_2, R_0 est une solution particulière de l'équation diophantienne (11), alors $S_2 + Q(z^{-1})z^{-d}B^-, R_0 - Q(z^{-1})(1-z^{-1})^p A^-$ est également une solution de cette équation quelque soit $Q(z^{-1})$

$\Rightarrow$ il existe une infinité de solutions d'ordre supérieur

- Comme A^-, A_m, A_0 sont moniques, en posant $z^{-1} = 0$ dans (11), on obtient $S_2(0) = 1$

$\Leftrightarrow$ $S_2(z^{-1})$ est monique

Synthèse des correcteurs numériques

7 Synthèse algébrique (11)

G. Fonctions de transfert en boucle fermée résultantes

$$Y(z) = \frac{z^{-d}B^{-}B_m^{+}}{A_m} Y_r(z) + \frac{z^{-d}BS_0}{A^{+}A_m A_0} \delta U(z) + \frac{A^{-}S_0}{A_m A_0} \delta Y(z) \qquad (12)$$

$\Rightarrow$ A^{+} doit être stable et de préférence amorti

$$E(z) = Y_r(z) - Y(z) = \frac{A_m - z^{-d}B^{-}B_m^{+}}{A_m} Y_r(z) - \frac{z^{-d}BS_0}{A^{+}A_m A_0} \delta U(z) - \frac{A^{-}S_0}{A_m A_0} \delta Y(z) \qquad (13)$$

$$U(z) = \frac{AB_m^{+}}{B^{+}A_m} Y_r(z) - \frac{z^{-d}B^{-}R_0}{A_m A_0} \delta U(z) - \frac{AR_0}{B^{+}A_m A_0} \delta Y(z) \qquad (14)$$

$\Rightarrow$ B^{+} doit être stable et de préférence amorti

Synthèse des correcteurs numériques

7 Synthèse algébrique (12)

H. Objectifs supplémentaires pour la synthèse

1. Erreur de vitesse (erreur d'ordre 1) nulle:

$$E(z) = Y_r(z) - Y(z) = \frac{A_m - z^{-d} B^- B_m^+}{A_m} Y_r(z) \qquad \text{Cf. (13)}$$

avec $Y_r(z) = \dfrac{T_e z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$ $\Rightarrow$ $A_m - z^{-d} B^- B_m^+ = (1-z^{-1})^2 B_0(z^{-1})$

Equation diophantienne $\Rightarrow$ $B_m^+(z^{-1}), B_0(z^{-1})$

2. Erreur d'accélération (erreur d'ordre 2) nulle:

$\Rightarrow$ $A_m - z^{-d} B^- B_m^+ = (1-z^{-1})^3 B_0(z^{-1})$

3. Erreur d'ordre r nulle : $A_m = z^{-d} B^- B_m^+ + (1-z^{-1})^{(r+1)} B_0(z^{-1})$ (15)

Synthèse des correcteurs numériques

7 Synthèse algébrique (13)

I. Récapitulatif

1. Définition des pôles et des zéros à compenser

$$G(z) = \frac{z^{-d}B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{z^{-d}B^{+}(z^{-1})B^{-}(z^{-1})}{A^{+}(z^{-1})A^{-}(z^{-1})}$$

avec

$B^{+}(z^{-1})$ monique et contenant les zéros que l'on souhaite compenser

$B^{-}(z^{-1})$ contenant les zéros que l'on ne souhaite pas compenser

$A^{+}(z^{-1})$ monique et contenant les pôles que l'on souhaite compenser

$A^{-}(z^{-1})$ monique et contenant les pôles que l'on ne souhaite pas compenser

2. Définition du modèle de suivi de consigne

$$M(z) = \frac{z^{-d}B_m(z^{-1})}{A_m(z^{-1})} = \frac{z^{-d}B^{-}(z^{-1})B_m^{+}(z^{-1})}{A_m(z^{-1})}$$

avec $A_m(0) = 1, B_m(1) = A_m(1)$

$$A_m = z^{-d}B^{-}B_m^{+} + (1 - z^{-1})^{(r+1)}B_0(z^{-1})$$

Synthèse des correcteurs numériques

7 Synthèse algébrique (14)

I. Récapitulatif (suite)

3. Ajout d'intégrateurs pour le rejet de perturbation

$$S(z^{-1}) = (1 - z^{-1})^p S_1(z^{-1})$$

4. Choix d'un filtre supplémentaire pour les perturbations

$A_0(z^{-1})$ stable et monique $\Rightarrow$ par défaut $A_0(z^{-1}) = 1$

5. Résolution des équations diophantiennes

$$(1 - z^{-1})^p A^-(z^{-1}) S_2(z^{-1}) + z^{-d} B^-(z^{-1}) R_0(z^{-1}) = A_m(z^{-1}) A_0(z^{-1})$$

$$T_0(z^{-1}) = B_m^+(z^{-1}) A_0(z^{-1})$$

$\Rightarrow$ $R_0(z^{-1}), S_2(z^{-1}), T_0(z^{-1})$

avec $S_2(z^{-1})$ monique

Synthèse des correcteurs numériques

7 Synthèse algébrique (15)

I. Récapitulatif (suite)

6. Calcul du correcteur RST

$$T(z^{-1}) = A^+(z^{-1})T_0(z^{-1}) = t_0 + t_1 z^{-1} + t_2 z^{-2} + \cdots$$

$$R(z^{-1}) = A^+(z^{-1})R_0(z^{-1}) = r_0 + r_1 z^{-1} + r_2 z^{-2} + \cdots$$

$$S(z^{-1}) = (1 - z^{-1})^p B^+(z^{-1})S_2(z^{-1}) = 1 + s_1 z^{-1} + s_2 z^{-2} + \cdots$$

7. Réalisation du correcteur

$$U(z) = \frac{T(z^{-1})}{S(z^{-1})} Y_r(z) - \frac{R(z^{-1})}{S(z^{-1})} Y(z)$$

$$\Rightarrow \quad u(k) = -s_1 u(k-1) - s_2 u(k-2) - \cdots + t_0 y_r(k) + t_1 y_r(k-1) + \cdots$$
$$- r_0 y(k) - r_1 y(k-1) - \cdots$$

Synthèse des correcteurs numériques

7 Synthèse algébrique (16)

7.2 Correcteur à temps d'établissement fini:

A. Système :

Soit $$G(z) = \frac{z^{-d}B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{z^{-d}B^{+}(z^{-1})B^{-}(z^{-1})}{A^{+}(z^{-1})A^{-}(z^{-1})}$$

avec $B^{+}(z^{-1})$ monique et contenant les zéros que l'on souhaite compenser

$B^{-}(z^{-1})$ contenant les zéros que l'on ne souhaite pas compenser

$A^{+}(z^{-1})$ monique et contenant les pôles que l'on souhaite compenser

$A^{-}(z^{-1})$ monique et contenant les pôles que l'on ne souhaite pas compenser

B. Modèle de suivi de consigne particulier: $A_m(z^{-1}) = 1$

$$M(z) = \frac{z^{-d}B_m(z^{-1})}{A_m(z^{-1})} = z^{-d}B^{-}(z^{-1})B_m^{+}(z^{-1})$$ avec $B^{-}(1)B_m^{+}(1) = 1$

et $1 = z^{-d}B^{-}(z^{-1})B_m^{+}(z^{-1}) + (1 - z^{-1})^{(r+1)}B_0(z^{-1})$ (erreur d'ordre r nulle)

Synthèse des correcteurs numériques

7 Synthèse algébrique (17)

7.2 Correcteur à temps d'établissement fini (suite):

C. Résolution des équations diophantiennes:

$$(1-z^{-1})^p A^-(z^{-1})S_2(z^{-1}) + z^{-d}B^-(z^{-1})R_0(z^{-1}) = A_0(z^{-1})$$

$$T_0(z^{-1}) = B_m^+(z^{-1})A_0(z^{-1}) \quad \Rightarrow \quad R_0(z^{-1}),\ S_2(z^{-1}),\ T_0(z^{-1})$$

avec $S_2(z^{-1})$ monique

D. Calcul du correcteur à temps d'établissement fini:

$$T(z^{-1}) = A^+(z^{-1})T_0(z^{-1})$$

$$R(z^{-1}) = A^+(z^{-1})R_0(z^{-1})$$

$$S(z^{-1}) = (1-z^{-1})^p B^+(z^{-1})S_2(z^{-1})$$

Synthèse des correcteurs numériques

7 Synthèse algébrique (18)

7.2 Correcteur à temps d'établissement fini (suite):

E. Fonctions de transfert en boucle fermée:

$$Y(z) = z^{-d} B^- B_m^+ Y_r(z) + \frac{z^{-d} B S_0}{A^+ A_0} \delta U(z) + \frac{A^- S_0}{A_0} \delta Y(z)$$ Cf. (12)

$$E(z) = Y_r(z) - Y(z) = (1 - z^{-1})^{(r+1)} B_0(z^{-1}) Y_r(z) - \frac{z^{-d} B S_0}{A^+ A_0} \delta U(z) - \frac{A^- S_0}{A_0} \delta Y(z)$$ Cf. (15)

→ Réponse à une consigne de type $y_r(k) = k^n \Gamma(k)$ avec $n \leq r$

$$Y_r(z) = \frac{P(z^{-1})}{(1 - z^{-1})^{n+1}} \quad \Rightarrow \quad E(z) = (1 - z^{-1})^{(r-n)} B_0(z^{-1}) P(z^{-1})$$

→ $\varepsilon(k) = 0 \quad \forall k > k_0 = \deg\left\{ (1 - z^{-1})^{(r-n)} B_0(z^{-1}) P(z^{-1}) \right\}$

→ Temps d'établissement fini minimal si $B_0(z^{-1})$ est minimal

Synthèse des correcteurs numériques

7 Synthèse algébrique (19)

7.2 Correcteur à temps d'établissement fini (suite):

F. Correcteur à réponse pile (« dead beat control »)

$$U(z) = \frac{AB_m^+}{B^+} Y_r(z) - \frac{z^{-d} B^- R_0}{A_0} \delta U(z) - \frac{AR_0}{B^+ A_0} \delta Y(z)$$

Cf. (14)

Cas particulier : si $B^+(z^{-1}) = 1$ et si le système contient r intégrateurs

$\Leftrightarrow$ $A(z^{-1}) = (1 - z^{-1})^r A_1(z^{-1})$

$\Rightarrow$ Réponse à une consigne de type $y_r(k) = k^n \Gamma(k)$ avec $n \leq r$

$$Y_r(z) = \frac{P(z^{-1})}{(1 - z^{-1})^{n+1}} \Rightarrow U(z) = (1 - z^{-1})^{(r-n)} A_1(z^{-1}) B_m^+(z^{-1}) P(z^{-1}) \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$\Rightarrow$ $u(k) = \text{constante} \quad \forall k > k_0 = \deg\left\{ (1 - z^{-1})^{(r-n)} A_1(z^{-1}) B_m^+(z^{-1}) P(z^{-1}) \right\}$

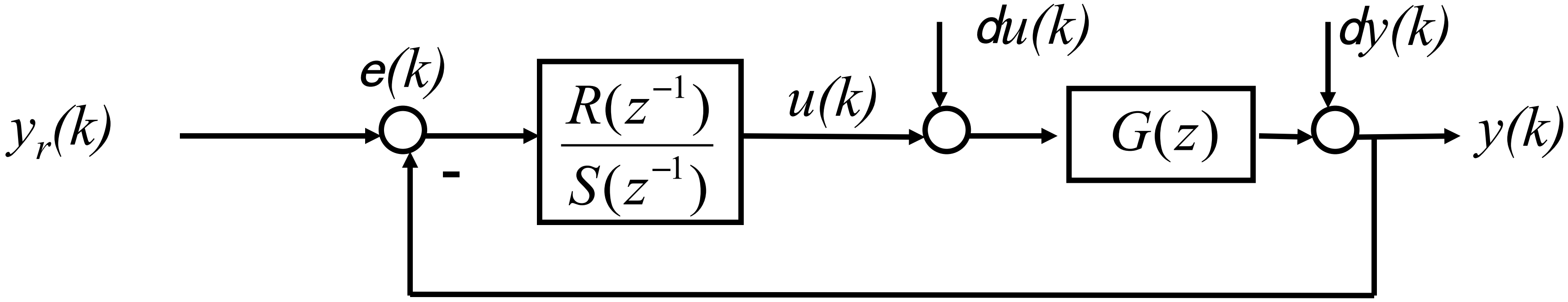
$\Rightarrow$ Temps d'établissement fini et réponse pile

Synthèse des correcteurs numériques

7 Synthèse algébrique (20)

7.3 Correcteur série:

A. Schéma



avec $R(z^{-1}), S(z^{-1})$ polynômes en z^{-1} et $S(z^{-1})$ monique

⇔ Correcteur RST avec $R(z^{-1}) = T(z^{-1})$

⇒ Moins de degrés de liberté dans la synthèse du correcteur

Synthèse des correcteurs numériques

7 Synthèse algébrique (21)

7.3 Correcteur série (suite):

B. Système :

Soit $$G(z)=\frac{z^{-d}B(z^{-1})}{A(z^{-1})}=\frac{z^{-d}B^{+}(z^{-1})B^{-}(z^{-1})}{A^{+}(z^{-1})A^{-}(z^{-1})}$$

avec $B^{+}(z^{-1})$ monique et contenant les zéros que l'on souhaite compenser

$B^{-}(z^{-1})$ contenant les zéros que l'on ne souhaite pas compenser

$A^{+}(z^{-1})$ monique et contenant les pôles que l'on souhaite compenser

$A^{-}(z^{-1})$ monique et contenant les pôles que l'on ne souhaite pas compenser

C. Modèle de suivi de consigne:

$$M(z)=\frac{z^{-d}B_m(z^{-1})}{A_m(z^{-1})}=\frac{z^{-d}B^{-}(z^{-1})B_m^{+}(z^{-1})}{A_m(z^{-1})}$$ avec $A_m(0)=1, B_m(1)=A_m(1)$

et $$A_m=z^{-d}B^{-}B_m^{+}+(1-z^{-1})^{(r+1)}B_0(z^{-1})$$ (erreur d'ordre r nulle)

Synthèse des correcteurs numériques

7 Synthèse algébrique (22)

7.3 Correcteur série (suite):

D. Ajout d'intégrateurs pour le rejet de perturbation et le suivi de consigne :

$$S(z^{-1}) = (1-z^{-1})^p S_1(z^{-1})$$

E. Compensation des pôles et des zéros:

$$S(z^{-1}) = B^+(z^{-1})S_0(z^{-1}) = (1-z^{-1})^p B^+(z^{-1})S_2(z^{-1})$$

$$R(z^{-1}) = A^+(z^{-1})R_0(z^{-1})$$

F. Résolution des équations diophantiennes (sans filtre supplémentaire)

$$(1-z^{-1})^p A^-(z^{-1})S_2(z^{-1}) + z^{-d}B^-(z^{-1})R_0(z^{-1}) = A_m(z^{-1}) \Rightarrow R_0, S_2$$

$$B^-(1)R_0(1) = A_m(1)$$

$$B_m^+(z^{-1}) = R_0(z^{-1}) \Rightarrow$$ Le choix de B_m^+ est imposé

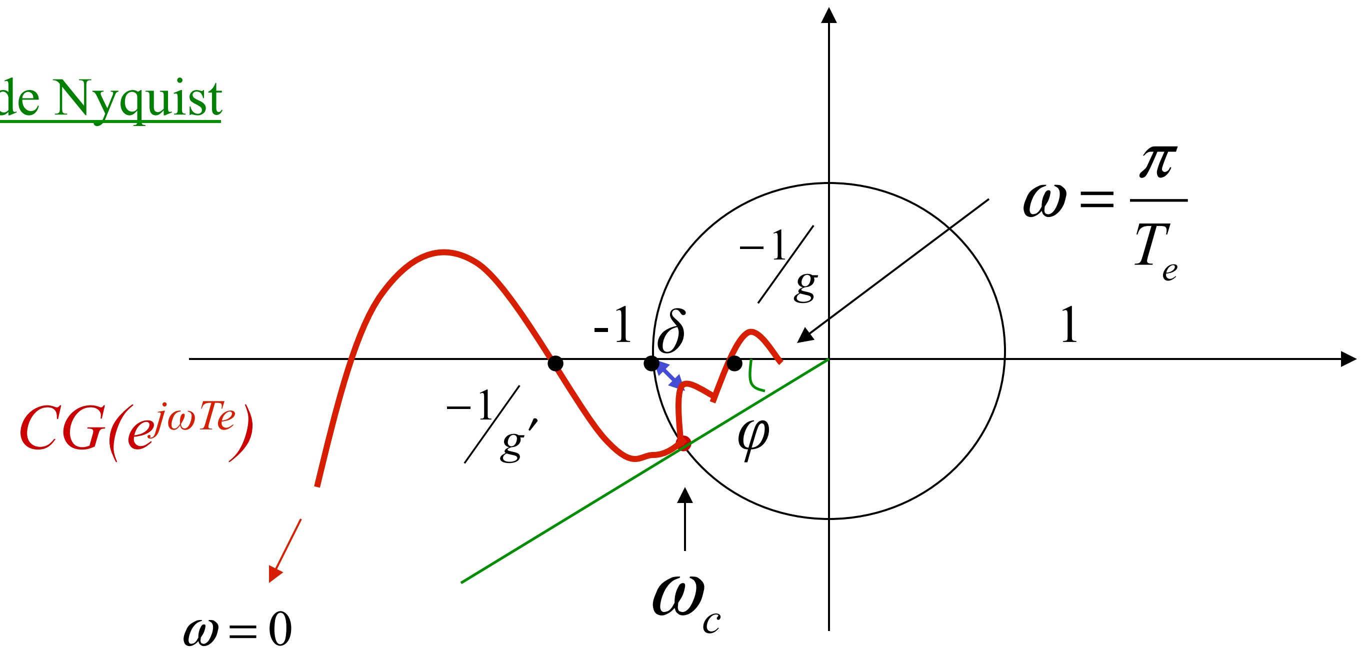
soit $A^-(z^{-1}) = (1-z^{-1})^m A_1^-(z^{-1}) \Rightarrow A_m = z^{-d}B^-B_m^+ + (1-z^{-1})^{(r+1)}B_0$ si $p+m>r$

Synthèse des correcteurs numériques

8 Robustesse (1)

Marges de stabilité

Diagramme de Nyquist



Critère de Nyquist:

Le système asservi (en boucle fermée) est stable ssi $CG(e^{j\omega Te})$ encercle le point -1 dans le sens anti-horlogique un nombre de fois égal au nombre de pôles instables de la boucle ouverte

Synthèse des correcteurs numériques

8 Robustesse (2)

Marges de stabilité (suite)

A. Marge de phase **φ**

= déphasage qui entraîne l'instabilité (retard de phase)

B. Marge de retard **τ**

= retard qui entraîne l'instabilité

soit $\{\omega_{ci}\}$ les pulsations telles que $\left|CG\left(e^{j\omega_{ci}T_e}\right)\right| = 1$

soit $\phi_i = \pi + \arg CG\left(e^{j\omega_{ci}T_e}\right)$

$$\Rightarrow \tau = \min_i \frac{\phi_i}{\omega_{ci}T_e}$$

Synthèse des correcteurs numériques

8 Robustesse (3)

Marges de stabilité (suite)

C. Marges de gain $\boldsymbol{g}$ et $\boldsymbol{g' < 1}$

= gain qui entraîne l'instabilité

D. Marge de module $\boldsymbol{\delta}$

= distance minimale entre $CG(e^{jwTe})$ et -1

$$\delta = \inf_{\omega \in \mathbf{R}} \left\{ \left| 1 + CG(e^{j\omega T_e}) \right| \right\} = \frac{1}{\sup_{\omega \in \mathbf{R}} \left| \dfrac{1}{1 + CG(e^{j\omega T_e})} \right|} \qquad \Rightarrow \delta = \frac{1}{\left\| S \right\|_\infty}$$

$$\boxed{\left\| \ \right\|_\infty = \text{norme } H_\infty \quad \text{ou} \quad L_\infty}$$