

# NOTE D'APPLICATION

Méthode de calcul des paramètres du correcteur  
en structure RST par placement de pôles

---

Amélioration de l'asservissement de visée laser  
Projet 2020-2021

Jordan Ponsard

5<sup>ème</sup> année de Génie Electrique option Conversion d'énergie et Robotique



## Table des matières

|   |   |
|---|---|
| Table des figures.....                        |   |
| Table des tableaux.....                       |   |
| Table des équations.....                      |   |
| Introduction.....                             | 1 |
| 1. Structure générale du correcteur RST ..... | 1 |
| 2. Étude en régulation .....                  | 1 |
| 2.1. Calcul du modèle.....                    | 2 |
| 2.2. Calculs des polynômes R et S .....       | 3 |
| 2.3. Amélioration de la régulation .....      | 4 |
| 3. Étude en poursuite .....                   | 5 |
| 3.1. Choix du modèle en poursuite.....        | 5 |
| 3.2. Choix du polynôme T .....                | 5 |

## Table des figures

|   |   |
|---|---|
| Figure 1 : structure générale d'un correcteur RST .....   | 1 |
| Figure 2 : structure RST d'un correcteur de type placement de pôles en régulation .....             | 2 |
| Figure 3 : structure d'un correcteur RST en régulation avec intégrateur et filtre adoucisseur ..... | 4 |
| Figure 4 : structure du modèle en poursuite .....   | 5 |

## Table des tableaux

|  |   |
|--|---|
| Tableau 1 : tableau pour un amortissement inférieur à 1 (avec dépassement) ..... | 2 |
| Tableau 2 : tableau pour un amortissement supérieur à 1 (sans dépassement) ..... | 2 |

## Table des équations

|   |   |
|---|---|
| Équation 1 : fonction de transfert en boucle fermée .....   | 1 |
| Équation 2 : fonction de transfert du RST en régulation .....   | 2 |
| Équation 3 : modèle en régulation .....   | 3 |
| Équation 4 : calculs des coefficients $h_1$ et $h_2$ .....  | 3 |
| Équation 5 : détails des polynômes B, A, S et R .....   | 3 |
| Équation 6 : formule pour définir les degrés des polynômes S et R .....                               | 3 |
| Équation 7 : identité de Bézout ou diophantienne .....  | 3 |
| Équation 8 : système matriciel pour définir les coefficients de S et R .....                          | 3 |
| Équation 9 : polynôme S avec intégrateur .....  | 4 |
| Équation 10 : fonction de transfert en régulation avec intégrateur et filtre adoucisseur .....        | 4 |
| Équation 11 : identité de Bézout avec intégrateur et filtre adoucisseur .....                         | 4 |
| Équation 12 : formule pour définir les degrés de S' et R avec intégrateur et filtre adoucisseur ..... | 4 |
| Équation 13 : fonction de transfert du modèle en poursuite .....                                      | 5 |
| Équation 14 : structure du polynôme T .....   | 5 |

## Introduction

Le nom de correcteur RST vient de l'appellation des trois polynômes qui seront définis afin d'obtenir la logique de commande d'un système. Ce dispositif permet un asservissement à deux degrés de liberté. En effet, la dynamique en poursuite et celle en régulation peuvent être choisies différemment (la première étant généralement choisie plus rapide que la seconde). C'est sur ce point que le correcteur est le plus avantageux.

Dans cette note d'application, c'est la méthode par placement de pôles qui sera utilisée pour expliquer comment un correcteur RST est calculé.

## 1. Structure générale du correcteur RST

Un système asservi par un correcteur RST peut se mettre sous la forme générale suivante :

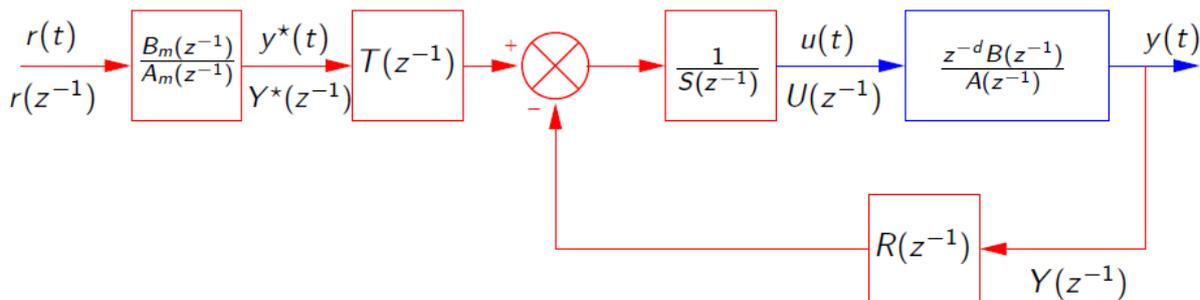


Figure 1 : structure générale d'un correcteur RST

On retrouve sur la figure 1 les éléments du correcteur en rouge et la fonction de transfert en boucle ouverte du système à asservir, en bleue.

Sur ce schéma,  $B(z^{-1})$ ,  $A(z^{-1})$ ,  $R(z^{-1})$ ,  $S(z^{-1})$ ,  $T(z^{-1})$ ,  $B_m(z^{-1})$  et  $A_m(z^{-1})$  sont des polynômes en  $z^{-1}$ .

Parmi ces polynômes,  $S(z^{-1})$  et  $A(z^{-1})$  sont moniques, c'est-à-dire que  $S(0) = A(0) = 1$ .

Pour cette structure complète, la fonction de transfert en boucle fermée est la suivante :

$$G(z^{-1}) = z^{-d} \frac{B(z^{-1}) \cdot T(z^{-1})}{A(z^{-1}) \cdot S(z^{-1}) + z^{-d} \cdot B(z^{-1}) \cdot R(z^{-1})} \frac{B_m(z^{-1})}{A_m(z^{-1})}$$

Équation 1 : fonction de transfert en boucle fermée

## 2. Étude en régulation

Cette partie traite de l'étude en régulation dont le but est d'obtenir une dynamique pour le système corrigé qui répond aux contraintes du cahier des charges.

## 2.1. Calcul du modèle

Pour définir le modèle qui sera piloté en régulation, on ne s'occupe que du correcteur de type placement de pôles suivant :

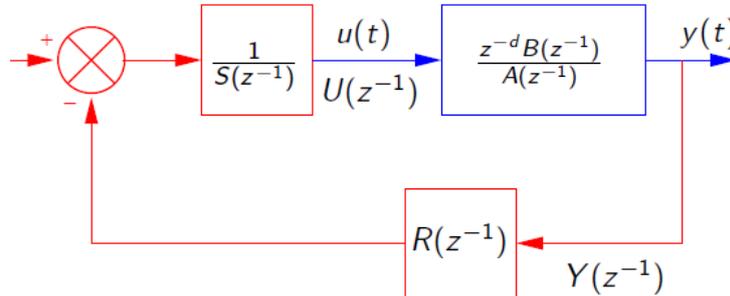


Figure 2 : structure RST d'un correcteur de type placement de pôles en régulation

La fonction de transfert liée à cet élément en régulation est donc la suivante :

$$G_r(z^{-1}) = z^{-d} \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1}) \cdot S(z^{-1}) + z^{-d} \cdot B(z^{-1}) \cdot R(z^{-1})}$$

Équation 2 : fonction de transfert du RST en régulation

Le modèle en régulation est calculé à partir des contraintes du cahier des charges. Celles-ci définissent si le système accepte ou non un dépassement et, si oui, de quel ordre, ainsi que le temps de réaction du système donné par le temps de montée ( $t_m$ ), le temps de réponse à n% ( $t_r$  n%), le temps de pic ( $t_{pic}$ ) ou la pseudo-période ( $T_p$ ). Ces éléments sont utiles pour déterminer la pulsation propre ( $\omega_n$ ) et le coefficient d'amortissement ( $\xi$ ) à l'aide des tableaux suivants associés à un modèle du 2n ordre :

| Amortissement inférieur à 1 |                      |                     |                    |                |      |                             |                             |                             |          |       |
|-----------------------------|----------------------|---------------------|--------------------|----------------|------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|----------|-------|
| $\xi$                       | Paramètres temporels |                     |                    |                |      | Paramètres fréquentiels     |                             |                             |          | $\xi$ |
|                             | $t_m \omega_n$       | $t_r \omega_n$ (5%) | $t_{pic} \omega_n$ | $T_p \omega_n$ | D %  | $\frac{\omega_R}{\omega_n}$ | $\frac{\omega_c}{\omega_n}$ | $\frac{\omega_c}{\omega_R}$ | $M_{dB}$ |       |
| 0,1                         | 1,68                 | 30                  | 3,16               | 6,31           | 73   | 0,99                        | 1,54                        | 1,56                        | 14       | 0,1   |
| 0,15                        | 1,74                 | 20                  | 3,18               | 6,36           | 62   | 0,98                        | 1,53                        | 1,56                        | 10,5     | 0,15  |
| 0,2                         | 1,81                 | 14                  | 3,21               | 6,41           | 53   | 0,96                        | 1,51                        | 1,57                        | 8,1      | 0,2   |
| 0,25                        | 1,88                 | 11                  | 3,24               | 6,49           | 44   | 0,94                        | 1,48                        | 1,59                        | 6,3      | 0,25  |
| 0,3                         | 1,97                 | 10,1                | 3,29               | 6,59           | 37   | 0,91                        | 1,45                        | 1,61                        | 4,8      | 0,3   |
| 0,35                        | 2,06                 | 7,9                 | 3,35               | 6,71           | 31   | 0,87                        | 1,42                        | 1,63                        | 3,6      | 0,35  |
| 0,4                         | 2,16                 | 7,7                 | 3,43               | 6,86           | 25   | 0,82                        | 1,37                        | 1,67                        | 2,7      | 0,4   |
| 0,45                        | 2,28                 | 5,4                 | 3,52               | 7,04           | 21   | 0,77                        | 1,33                        | 1,72                        | 1,9      | 0,45  |
| 0,5                         | 2,42                 | 5,3                 | 3,63               | 7,26           | 16   | 0,71                        | 1,27                        | 1,80                        | 1,2      | 0,5   |
| 0,55                        | 2,58                 | 5,3                 | 3,76               | 7,52           | 12,6 | 0,63                        | 1,21                        | 1,93                        | 0,7      | 0,55  |
| 0,6                         | 2,77                 | 5,2                 | 3,93               | 7,85           | 9,5  | 0,53                        | 1,15                        | 2,17                        | 0,3      | 0,6   |
| 0,65                        | 3,00                 | 5,0                 | 4,13               | 8,27           | 6,8  | 0,39                        | 1,08                        | 2,74                        | 0,1      | 0,65  |
| 0,7                         | 3,29                 | 3                   | 4,40               | 8,80           | 4,6  | 0,14                        | 1,01                        | 7,14                        | 0        | 0,7   |
| 0,75                        | 3,66                 | 3,1                 | 4,75               | 9,50           | 2,84 | -                           | 0,94                        | -                           | -        | 0,75  |
| 0,80                        | 4,16                 | 3,4                 | 5,24               | 10,5           | 1,52 | -                           | 0,87                        | -                           | -        | 0,80  |
| 0,85                        | 4,91                 | 3,7                 | 5,96               | 11,93          | 0,63 | -                           | 0,81                        | -                           | -        | 0,85  |
| 0,90                        | 6,17                 | 4                   | 7,21               | 14,41          | 0,15 | -                           | 0,75                        | -                           | -        | 0,90  |
| 0,95                        | 9,09                 | 4,1                 | 10,06              | 20,12          | 0,01 | -                           | 0,69                        | -                           | -        | 0,95  |

Tableau 1 : tableau pour un amortissement inférieur à 1 (avec dépassement)

| Amortissement supérieur à 1 |                                 |      |      |  |      |       |  |
|-----------------------------|---------------------------------|------|------|--|------|-------|--|
| $\xi$                       | temps de réponse $t_r \omega_n$ |      |      | pulsation de coupure $\frac{\omega_c}{\omega_n}$ |      | $\xi$ |  |
|                             | 10 %                            | 5 %  | 2 %  |  |      |       |  |
| 1                           | 3,9                             | 4,8  | 5,8  |  | 0,64 | 1     |  |
| 1,25                        | 5,2                             | 6,6  | 8,4  |  | 0,47 | 1,25  |  |
| 1,5                         | 6,4                             | 8,2  | 10,8 |  | 0,37 | 1,5   |  |
| 1,75                        | 7,7                             | 9,9  | 13,0 |  | 0,31 | 1,75  |  |
| 2                           | 8,9                             | 11,4 | 14,6 |  | 0,27 | 2     |  |
| 2,25                        | 10,0                            | 13,0 | 16,5 |  | 0,23 | 2,25  |  |

Tableau 2 : tableau pour un amortissement supérieur à 1 (sans dépassement)

La dynamique du système en régulation est donnée par les pôles du polynôme suivant :

$$H_D^+(z^{-1}) = 1 + h_1.z^{-1} + h_2.z^{-2}$$

Équation 3 : modèle en régulation

Le calcul de  $h_1$  et  $h_2$  se fait à partir des pôles complexes conjugués du modèle à atteindre, c'est-à-dire :

$$h_1 = -(Z_1 + Z_1^*) \quad h_2 = Z_1.Z_1^* \quad Z_1, Z_1^* = \exp(-\xi.\omega_n.T_e \pm j\sqrt{(1-\xi^2)}.\omega_n.T_e)$$

Équation 4 : calculs des coefficients  $h_1$  et  $h_2$

## 2.2. Calculs des polynômes R et S

En détaillant l'Équation 2, les polynômes qui composent cette fonction de transfert sont de la forme :

$$\begin{aligned} B(z^{-1}) &= b_1.z^{-1} + b_2.z^{-2} + \dots + b_m.z^{-m} \\ A(z^{-1}) &= 1 + a_1.z^{-1} + a_2.z^{-2} + \dots + a_n.z^{-n} \\ S(z^{-1}) &= 1 + s_1.z^{-1} + s_2.z^{-2} + \dots + s_y.z^{-y} \\ R(z^{-1}) &= r_0 + r_1.z^{-1} + r_2.z^{-2} + \dots + r_\gamma.z^{-\gamma} \end{aligned}$$

Équation 5 : détails des polynômes B, A, S et R

Pour définir les degrés des polynômes S et R, il faut utiliser la formule suivante :

$$y = \max(n, m + d) - 1 \quad \text{Avec } d : \text{retard du système}$$

Équation 6 : formule pour définir les degrés des polynômes S et R

Une fois cet élément défini, on peut en déduire leur expression numérique en identifiant les termes de même degré. Pour cela, on utilise l'identité de Bézout qui reprend l'Équation 3 ainsi que le numérateur de l'Équation 2. Cette nouvelle équation est de la forme :

$$A(z^{-1}).S(z^{-1}) + z^{-d}.B(z^{-1}).R(z^{-1}) = H_D^+(z^{-1})$$

Équation 7 : identité de Bézout ou diophantienne

Grâce à cette dernière formule, il est désormais possible d'écrire les différentes équations du système sous la forme du système matriciel suivant :

$$M.\theta = H_D^+ \Leftrightarrow \theta = M^{-1}.H_D^+ \quad \text{Avec } \theta = \begin{pmatrix} 1 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_y \\ r_0 \\ r_1 \\ \vdots \\ r_\gamma \end{pmatrix} \quad \text{et } H_D^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ h_1 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Équation 8 : système matriciel pour définir les coefficients de S et R

Il suffit ensuite de résoudre ce système pour obtenir les coefficients des polynômes S et R.

### 2.3. Amélioration de la régulation

En fonction de notre système et de notre objectif, il est possible d'apporter des améliorations au correcteur RST.

La première amélioration possible est d'ajouter dans la chaîne directe un intégrateur si jamais ceux présents dans le système ne suffisent pas pour imposer une erreur statique nulle. L'ajout de cet intégrateur supplémentaire se fait au niveau de polynôme S qui sera alors comme suit :

$$S(z^{-1}) = (1 - z^{-1})^g \cdot S'(z^{-1}) \quad \text{Avec } g : \text{nombre d'intégrateurs}$$

Équation 9 : polynôme S avec intégrateur

L'ajout d'un filtre adoucisseur  $H_a(z^{-1})$  afin de limiter les effets de bruit est également une amélioration possible du correcteur. Pour donner un exemple, le filtre adoucisseur peut être ajouté au niveau de la chaîne de retour (avant le polynôme R) pour limiter l'impact d'une mesure bruitée sur la commande.

Si l'on rajoute un intégrateur et un filtre adoucisseur comme cité ci-dessus, on obtient le schéma du correcteur en régulation suivant :

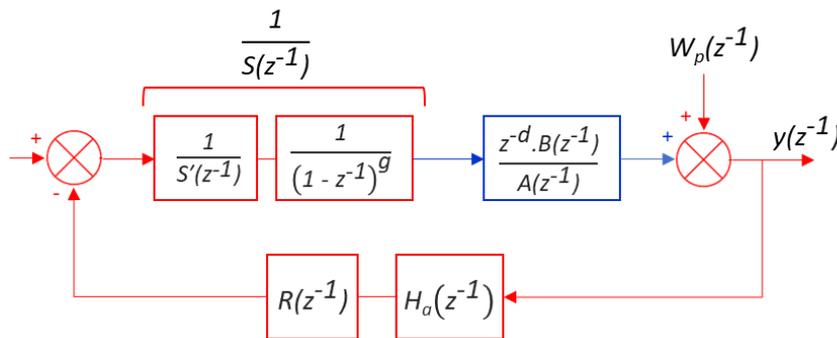


Figure 3 : structure d'un correcteur RST en régulation avec intégrateur et filtre adoucisseur

La fonction de transfert liée à cette structure devient alors :

$$G_r(z^{-1}) = \frac{z^{-d} \cdot B(z^{-1})}{A(z^{-1}) \cdot S'(z^{-1}) \cdot (1 - z^{-1})^g + z^{-d} \cdot B(z^{-1}) \cdot H_a(z^{-1}) \cdot R(z^{-1})}$$

Équation 10 : fonction de transfert en régulation avec intégrateur et filtre adoucisseur

De ce fait, l'expression de l'identité de Bézout va changer et sera de la forme :

$$A(z^{-1}) \cdot S'(z^{-1}) \cdot (1 - z^{-1})^g + z^{-d} \cdot B(z^{-1}) \cdot H_a(z^{-1}) \cdot R(z^{-1}) = H_0^+(z^{-1})$$

Équation 11 : identité de Bézout avec intégrateur et filtre adoucisseur

Pour finir, le degré des polynômes R et S' va également être impacté et sera calculé à l'aide de la relation :

$$y = \max(n + g, m + d + \deg(H_a)) - 1$$

Équation 12 : formule pour définir les degrés de S' et R avec intégrateur et filtre adoucisseur

### 3. Étude en poursuite

Pour définir le modèle en poursuite, on ne s'occupe que de cette partie du correcteur RST :

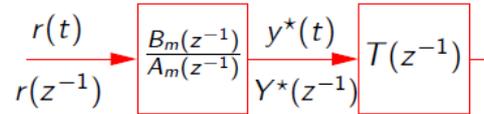


Figure 4 : structure du modèle en poursuite

#### 3.1. Choix du modèle en poursuite

Dans cette étude, on cherche à imposer un système en poursuite, généralement plus rapide que celui fixé en régulation, et défini par les polynômes  $B_m(z^{-1})$  et  $A_m(z^{-1})$ . L'intérêt d'effectuer une boucle de rétroaction comme celle-ci est de faire en sorte que la sortie suive la consigne d'une certaine manière en suivant une courbe de référence.

Les polynômes  $B_m(z^{-1})$  et  $A_m(z^{-1})$  sont généralement déterminés d'après les performances désirées pour la trajectoire avec un temps de réponse défini et un dépassement. Il faut néanmoins savoir que le retard pur du système ne peut pas être compensé par ce modèle en poursuite et, également que cela ne compense pas les zéros. Le plus souvent, le format de ce modèle en poursuite est le suivant :

$$G_m(z^{-1}) = \frac{B_m(z^{-1})}{A_m(z^{-1})} = \frac{z^{-d} \cdot (b_{m0} + b_{m1} \cdot z^{-1})}{1 + a_{m1} \cdot z^{-1} + a_{m2} \cdot z^{-2}}$$

Équation 13 : fonction de transfert du modèle en poursuite

#### 3.2. Choix du polynôme T

Le polynôme T est un pré-compensateur et il sert à obtenir le transfert entre la consigne et la sortie. On choisit, dans ce cas, que ce polynôme soit de la forme suivante :

$$T(z^{-1}) = \frac{HD^+(z^{-1})}{B(1)}$$

Équation 14 : structure du polynôme T