Angle solide :

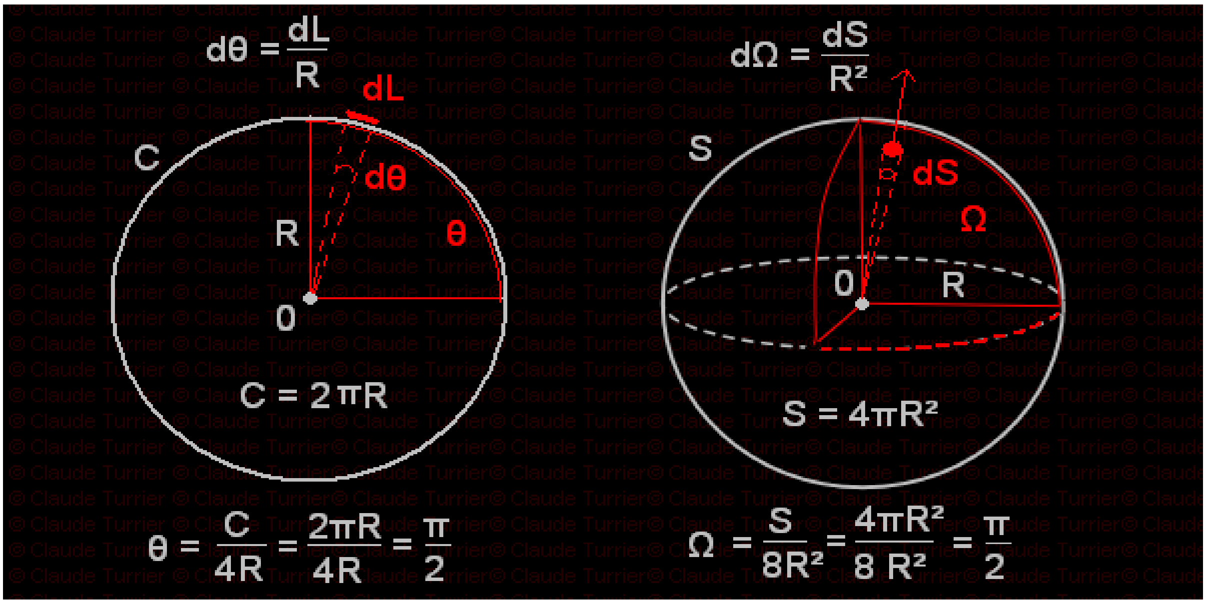
- **Définition**

De façon comparable à un angle, qui est une grandeur sans dimension définissant la portion d'espace délimitée par le centre d'un cercle et une partie de la circonférence de ce cercle, un angle solide est une grandeur sans dimension qui définit la portion d'espace délimitée par le centre d'une sphère et une partie de la surface de cette sphère.

Soit une sphère de centre 0 et de rayon R, et un élément de surface dS sur cette sphère. L'angle solide dΩ qui définit la portion d'espace délimitée par le centre de la sphère et l'élément de surface dS est défini par :

$$d\Omega = \frac{dS}{R^2}$$

L'angle dΩ est exprimé en stéradian (sr), nombre sans dimension.
Si on considère la portion d'espace délimitée par un quart de sphère de rayon R, l'angle solide correspondant est $\Omega \;= 4\pi R^2/8R^2 \;=\; \pi/2\;(sr)$



- **Généralisation**

Si on prend un élément de surface quelconque infiniment petit dS' (assimilé à la surface d'un cercle infiniment petit) situé autour d'un point M et incliné d'un angle β par rapport à dS, on a $dS \;=\; dS'\,cos\,\beta \;=\; dS'\,u.n$
d'où

$$d\Omega = \frac{dS}{R^2} = \frac{dS'.\cos(\beta)}{R^2} = \frac{dS'}{R^2}\;u.n$$

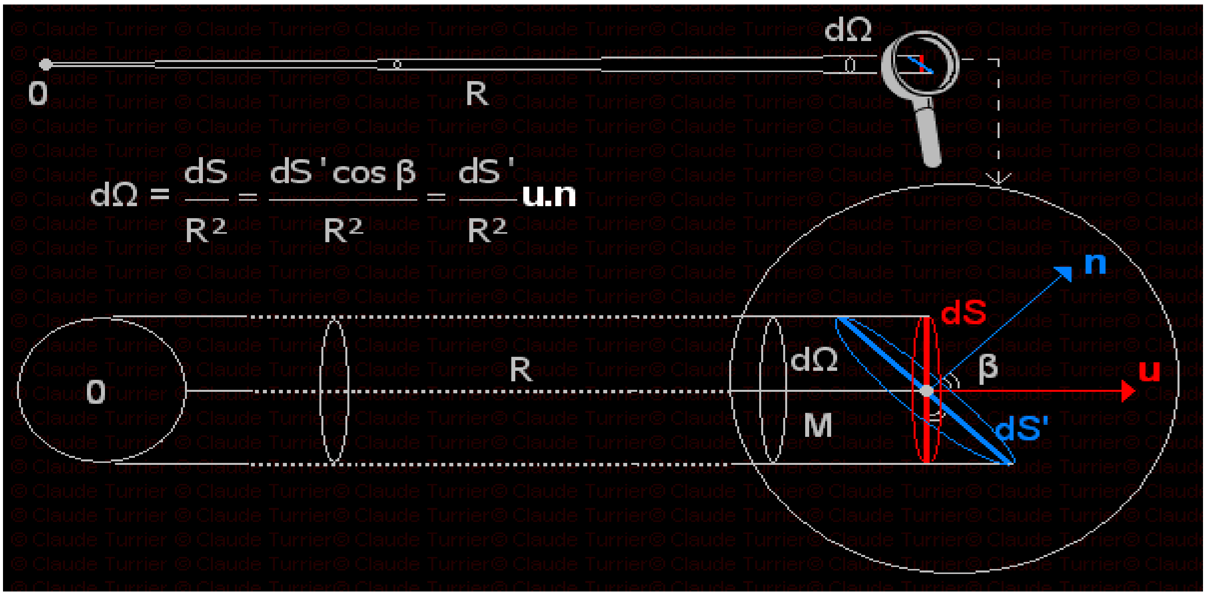
u = 0M/0M vecteur unitaire dirigé dans le sens 0M
n : vecteur unitaire perpendiculaire à dS' au point M

Donc l'élément d'angle solide qui définit la portion d'espace comprise entre un point 0 et une surface élémentaire dS =dS.n (située autour d'un point M et présentant une orientation quelconque) est (avec r=OM)

$$d\Omega = \frac{dS.u}{r^2}$$

En particulier, si l'élément de surface dS est perpendiculaire à 0M, on retrouve

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2}$$



Surfaces et angles solides élémentaires

EXEMPLES :

I. Angle solide délimité par un disque :

On découpe le disque en une succession de couronnes circulaires élémentaires, de largeur dr et de même axe 0P, imbriquées les unes à l'intérieur des autres. Les éléments de surface constituant chaque couronne élémentaire sont orientés en formant même angle φ avec l'axe du disque (schéma ci-dessous).
La surface d'une couronne élémentaire est :

$dS \ = 2\pi r dr \ avec \ r = h \ tan\varphi$

$=> dr = \left(\frac{h}{cos^2\varphi}\right) d\varphi$

d'où $dS = 2\pi h \ tan\varphi \ \left(\frac{h}{cos^2\varphi}\right) d\varphi \ = \ 2\pi h^2 \left(\frac{tan\varphi}{cos^2\varphi}\right) d\varphi$

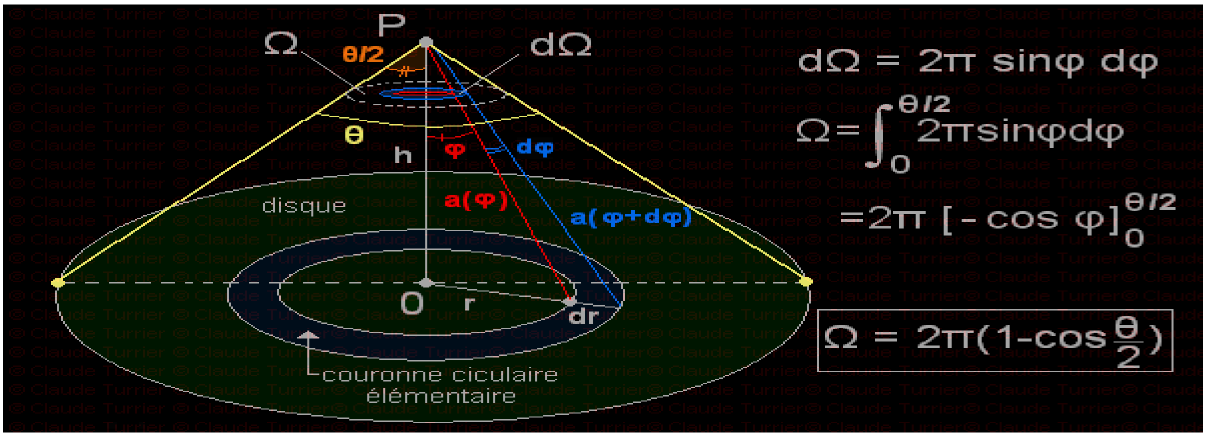
$d'autre \ part \ , \qquad d\Omega \ = \ dS \frac{cos\varphi}{a^2(\varphi)} \ avec \ a(\varphi) = \frac{h}{\cos(\varphi)}$

$d'où \ \ d\Omega \ = \ dS \ cos\varphi \frac{cos^2\varphi}{h^2}$

$d\Omega \ = \ 2\pi h^2 \left(\frac{tan\varphi}{cos^2\varphi}\right). cos\varphi \frac{cos^2\varphi}{h^2}. d\varphi$

$d\Omega \ = \ 2\pi . sin\varphi d\varphi$

Pour couvrir tout le disque, on intègre une infinité de couronnes circulaires élémentaires en faisant varier φ entre 0 et θ/2. On en déduit $\Omega = 2\pi \ (1 - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right))$



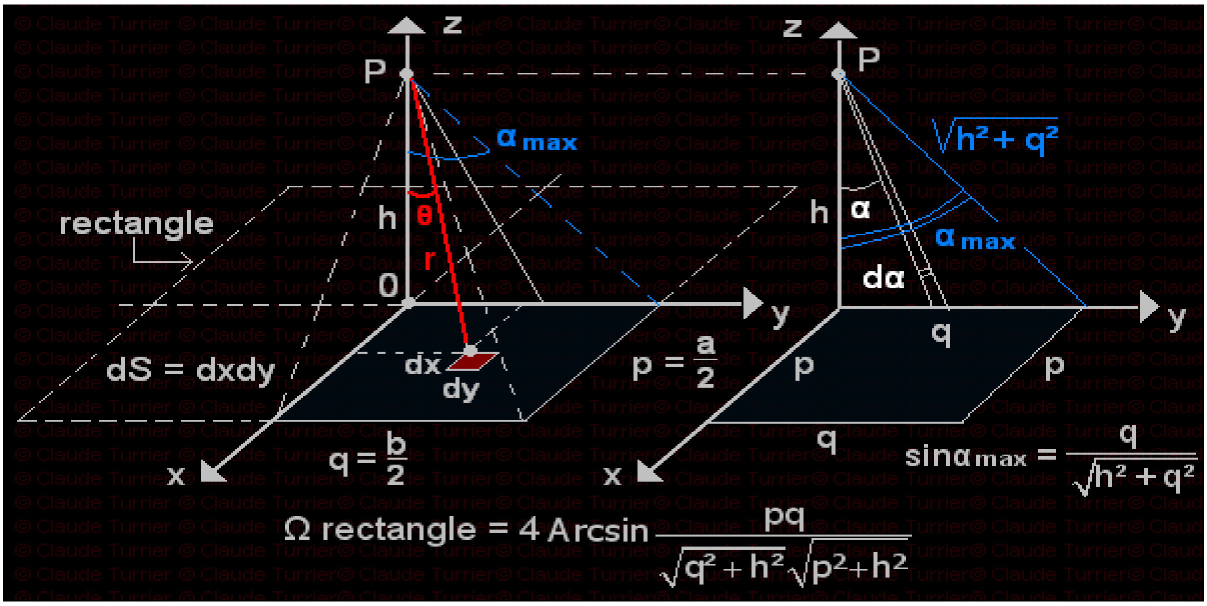
Angle solide délimité par un disque et par un point P situé sur son axe

- $Si \ \theta -> \ \pi, cos \ (\frac{\theta}{2}) -> \ 0 \ et \ \Omega -> 2\pi$
- $Si \ \theta -> \ 0, cos \ (\frac{\theta}{2}) -> \ 1 \ et \ \Omega -> 0$

II. Angle solide délimité par un rectangle :

Quel est l'angle solide délimité par un rectangle de cotés a et b (capteur d'appareil photo ou de caméscope numérique par exemple) et un point P situé à une distance h sur l'axe central de ce rectangle ?

On suppose que, par exemple, le rectangle est centré en 0 et placé dans le plan xy. On calcule l'angle solide d'un quart de ce rectangle, de côté p=a/2 et q=b/2 puis, par symétrie, on multiplie le résultat par 4 pour obtenir l'angle solide relatif au rectangle complet.



$$d\Omega = dS.\frac{\cos(\theta)}{r^2} \; avec \; dS = dx.dy, \qquad \cos(\theta) = \frac{h}{r} \; et \; r = \sqrt{x^2+y^2+h^2}$$

Donc : $d\Omega = \frac{h}{r^3}\, dxdy = h.(x^2+y^2+h^2)^{-\frac{3}{2}}\, dxdy$

$$\Omega = h.\int_{x=0}^{p}\int_{y=0}^{q} (x^2+y^2+h^2)^{-\frac{3}{2}}\, dxdy$$

On intègre d'abord par rapport à x pour obtenir une fonction i(y) :

$$\mathrm{i(y)} = \int_{x=0}^{p} (x^2+y^2+h^2)^{-\frac{3}{2}}\, dx = \int_{x=0}^{p} (x^2+k)^{-\frac{3}{2}}\, dx \; avec \; k = y^2+h^2$$

$$\mathrm{i(y)} = \left[\frac{x(k+x^2)^{-\frac{1}{2}}}{k}\right]_0^p = \frac{p(k+p^2)^{-\frac{1}{2}}}{k} = \frac{p(h^2+p^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}}{h^2+y^2}$$

D'où : $\Omega = p.h \int_{y=0}^{q} \frac{(h^2+p^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}}{h^2+y^2} dy$

$On\ pose\ y = h.\tan\alpha \Rightarrow dy = \left(\frac{h}{\cos^2\alpha}\right) d\alpha \quad avec \frac{1}{\cos^2\alpha} = 1+\tan^2\alpha$

On trouvera :

$$\Omega = \int_{\alpha=0}^{\alpha=\alpha max} \frac{d.\sin(\alpha)}{\sqrt{(1+\frac{h^2}{p^2-\sin^2(\alpha)})}} d\alpha = \left[Arcsin\left(\frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{1+\frac{h^2}{p^2}}}\right) \right]_0^{\alpha max}$$

On déduit l'angle solide total, délimité par le rectangle de cotés a=2p et b=2q, en multipliant le résultat précédent par 4.

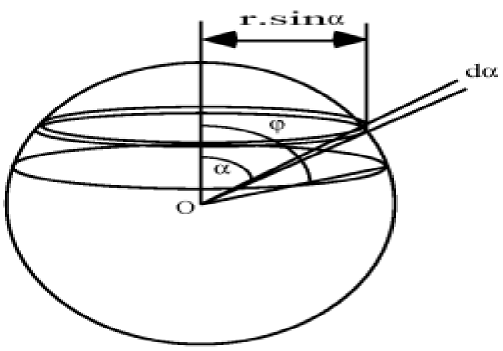
$$\Omega\ \text{rectangle} = 4\,\text{Arcsin}\frac{pq}{\sqrt{q^2+h^2}\sqrt{p^2+h^2}}$$

- $Si\ h\ est\ très\ inférieur\ à\ p\ et\ q\ on\ a\ \Omega \sim 4\ Arcsin\ 1 = 4\pi/2 = 2\pi$
- $Si\ h\ est\ très\ supérieur\ p\ et\ q\ on\ a\ \Omega \sim 4\ Arcsin\ 0 = 0$
- $Pour\ un\ carré, p = q\ et\ \Omega\ carré = 4\ Arcsin\ (p^2/p^2+h^2)$
- $Pour\ un\ carré\ avec\ h >> p\ \Omega\ carré \sim 4\ Arcsin\ (p^2/h^2)$

Puisque la surface d'une sphère vaut $4\pi.R^2$, un angle solide Ωest toujours compris entre 0et 4π.

III. Angle solide délimité par une calotte sphérique :

Soit φ l'angle qui permet de définir les limites de la calotte et r le rayon de la sphère.



Si on décompose la calotte en anneaux de largeur infiniment petite $d\alpha$ et de position α, chaque anneau a une largeur $r.d\alpha$, une longueur $2\pi r sin(\alpha)$,

Donc une surface

$$dS = r.d\alpha.2\pi.r.\sin\alpha = 2\pi.r^2\sin\alpha.d\alpha$$

Donc, la surface de toute la calotte vaut

$$S = \int_0^{\varphi} 2\pi.r^2\sin\alpha.d\alpha$$
$$= 2\pi.r^2\Big[-\cos\alpha\Big]_0^{\varphi}$$
$$= 2\pi.r^2[1 - \cos\varphi]$$

Donc, l'angle solide recherché vaut :

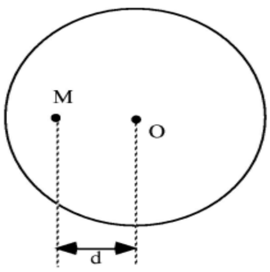
$$\Omega = 2\pi.[1 - \cos\varphi]$$

On vérifie bien que $si\varphi \to 0, \Omega \to 0$

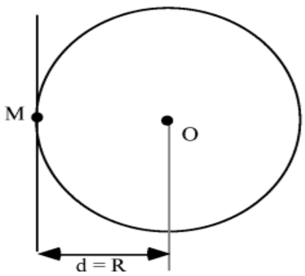
et que si $\varphi \to \pi, \Omega \to 4\pi$(la calotte devient étendue à toute la sphère)

IV. Angle solide sous lequel on voit une sphère :

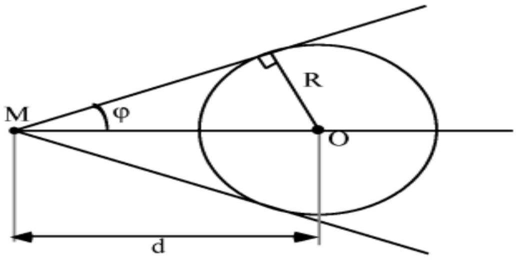
Il faut distinguer différents cas, selon la position relative du point et de la sphère.



1) Si le point M est à l'intérieur de la sphère, la surface interne de celle-ci occupe tout l'horizon. Donc $\Omega = 4\pi$.



2) Si le point M est juste sur la surface de la sphère, elle lui cache exactement la moitié de l'horizon. Donc $\Omega = 2\pi$.



3) Si le point M est à l'extérieur de la sphère :

On peut écrire :

$$Sin(\alpha) = \frac{R}{d}$$

Donc :

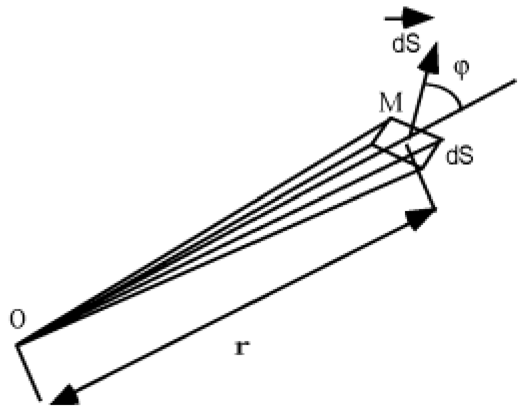
$$Cos(\alpha) = \sqrt{1 - \frac{R^2}{d^2}}$$

On peut alors utiliser la relation démontrée précédemment :

$$\Omega = 2\pi.(1 - \cos(\varphi))$$

$$= 2\,\pi.(1 - \sqrt{1 - \frac{R^2}{d^2}})$$

V. Angle solide sous lequel on voit une surface infiniment petite dS depuis un point O :



Soit φ l'angle que font la droite OM et un vecteur $d\vec{S}$ perpendiculaire à la surface dS en son milieu M.

Il s'agit bien sûr de l'angle solide du cône de sommet O s'appuyant sur les cotés de la surface dS.

Pour calculer cet angle solide $d\Omega$, nous allons appliquer la définition précédente et calculer la surface délimitée par notre cône sur une sphère de centre Oet passant par M.

Comme l'angle solide $d\Omega$est infiniment petit, cette surface élémentaire est assimilable à sa projection sur le plan tangent à la sphère en ce point M. Elle vaut donc $dS.cos\varphi$ et on en déduit :

$$d\Omega = \frac{dS.cos\varphi}{r^2}$$