Correcteur placement de pôles : intégrateurs, adoucisseurs et compensation des zéros

Ajout d'intégrateurs

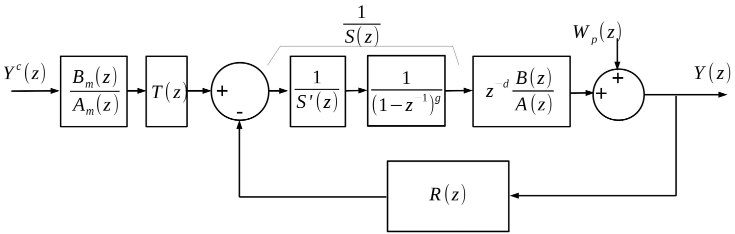
Le cahier des charges impose souvent des contraintes sur les erreurs statiques du système.

On peut être amené à ajouter un ou plusieurs intégrateurs dans le correcteur.

Cette opération s'effectue au niveau du polynôme S, qui se sépare alors en deux parties :

$$S(z) = (1 - z^{-1})^g S'(z)$$

On obtient le synoptique du système corrigé :



où

$$S(z) \to S'(z)(1 - z^{-1})^g$$

et

$$\frac{Y(z)}{Y^c(z)} = \frac{z^{-d}T.B}{AS'(1 - z^{-1})^g + z^{-d}B.R}$$

La fonction de transfert entre Y^c et Y devient

$$\frac{Y}{Y^c} = \frac{z^{-d}BT}{AS'(1-z^{-1})^g + z^{-d}BR}$$

D'où l'expression de l'identité de Bezout :

$$AS'(1-z^{-1})^g + z^{-d}B.R = H_D^+$$

Le degré des polynômes R et S' est calculé par la relation suivante :

$$l = \max(n+g, m+d) - 1$$

La résolution du système s'effectue, à partir du développement de l'identité de Bezout, de manière similaire au cas précédent.

Exemple d'ajout d'intégrateurs et d'adoucisseurs

On considère le même système système : $G(p) = \frac{1}{1+5p}$ avec $T_e = 1s$.

On souhaite obtenir des comportements du premier ordre de :

- constante de temps $2s$ en régulation
- Erreur statique nulle (donc ajout d'un intégrateur)
- constante de temps $3s$ en poursuite.

Exemple

Étapes :

1. Calcul de $G(z)$,
2. Calcul de $H_D^+(z)$ (régulation),
3. Fixer le degré de $R(z)$ et $S(z)$
4. Identité de Bezout : $\rightarrow$ calcul de $R(z)$ et $S(z)$,
5. Calcul de $\frac{B_m}{A_m}$ (poursuite)
6. Calcul de $T(z)$

Fixer le degré de $R(z)$ et $S(z)$

l : degré de $R(z)$ et $S(z)$

$$l = \max(n+g, m+d) - 1$$

$$l = \max(1+1, 1+0) - 1$$

$$l = 1$$

Donc $S(z) = (1 - z^{-1})(1 + s_1 z^{-1}) \qquad R(z) = r_0 + r_1 z^{-1}$

Identité de Bezout : $\rightarrow$ calcul de $R(z)$ et $S(z)$

$$AS'(1-z^{-1})^g + z^{-d}BR = H_D^+$$

$$(1-az^{-1})(1-z^{-1})(1+s_1z^{-1}) + z^{-1}(1-a)(r_0+r_1z^{-1}) = 1 - a_rz^{-1}$$

$$\begin{array}{c} 1 \\ +z^{-1}\left(s_1 - 1 - a + (1-a)r0\right) \\ +z^{-2}\left(a - as_1 - s_1 + (1-a)r_1\right) \\ +z^{-3}\left(as_1\right) \end{array} = \begin{array}{c} 1 \\ +z^{-1}(-a_r) \\ +z^{-2}(0) \\ +z^{-3}(0) \end{array}$$

Identité de Bezout : $\rightarrow$ calcul de $R(z)$ et $S(z)$

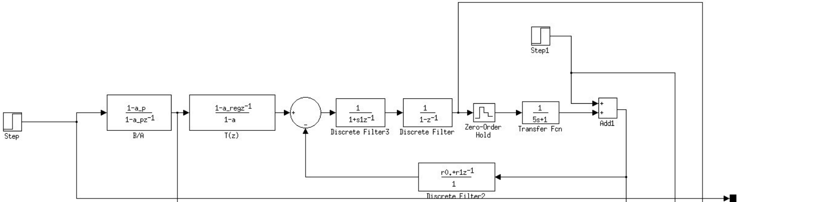
$$AS'(1-z^{-1})^g + z^{-d}BR = H_D^+$$

$$(1-az^{-1})(1-z^{-1})(1+s_1z^{-1}) + z^{-1}(1-a)(r_0+r_1z^{-1}) = 1-a_rz^{-1}$$

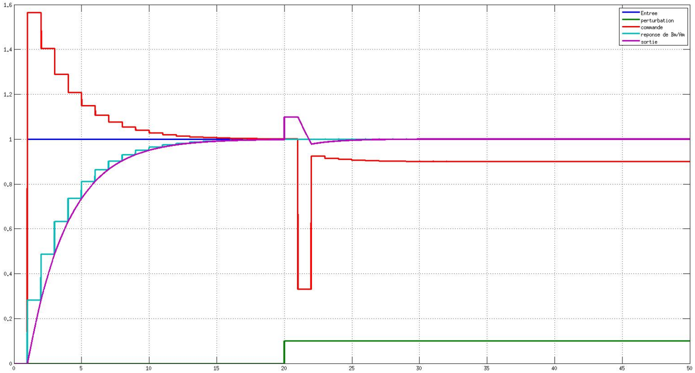
$$\begin{bmatrix} 1 \\ s_1 \\ r_0 \\ r_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & (1-a) & 0 \\ 0 & -a-1 & 0 & (1-a) \\ 0 & a & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -a_r+1+a \\ -a \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$s_1 = 0\,;\ r_0 = 6.6873\,;\ r_1 = -4.5167$$

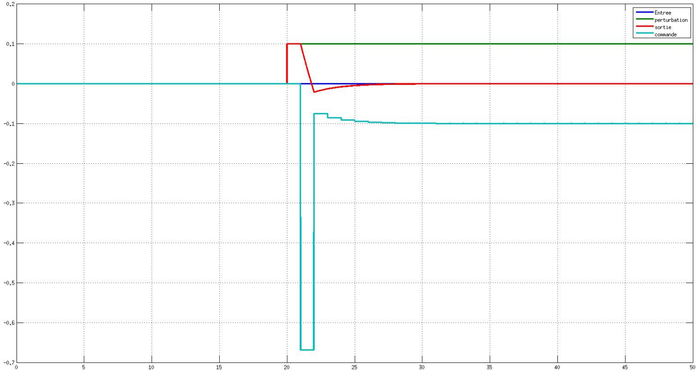
Simulation


Step
1-a_p
1-a_pz-1
B/A
1-a_regz-1
1-a
T(z)
+
-
1
1+s1z-1
Discrete Filter3
1
1-z-1
Discrete Filter
Zero-Order Hold
Step1
1
5s+1
Transfer Fcn
+
+
Add1
r0.+r1z-1
1
Discrete Filter2
Scope

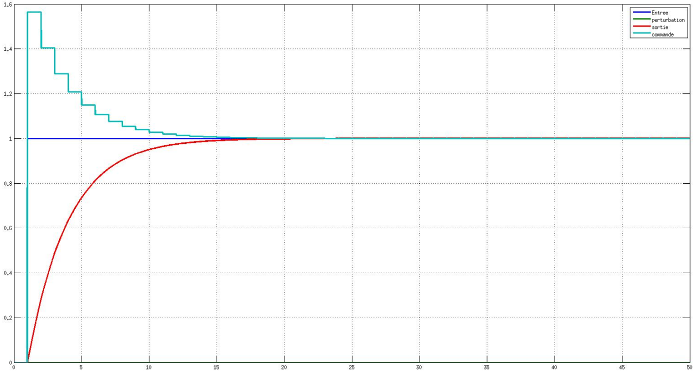
Résultat


Entree
perturbation
commande
reponse de Bm/Am
sortie
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50

Etude en régulation quand le système est légèrement différent (Gain statique de 1.1)

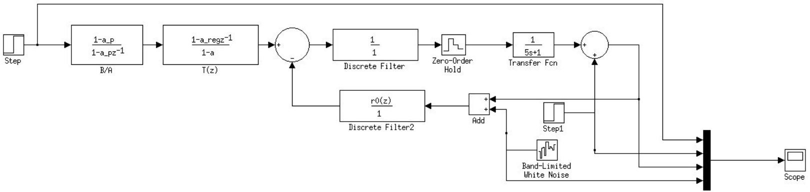


Etude en poursuite quand le système est légèrement différent (Gain statique de 1.1)



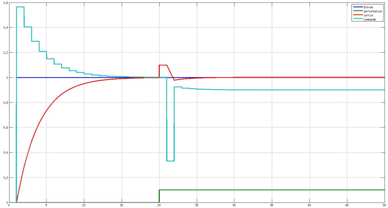
Ajout de filtres adoucisseurs

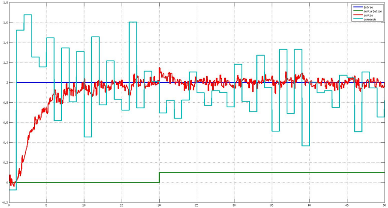
Parfois, le signal issu du capteur de mesure est bruité,



Ajout de filtres adoucisseurs

Parfois, le signal issu du capteur de mesure est bruité,





Ajout de filtres adoucisseurs

Lorsque le signal issu du capteur de mesure est bruité, on peut introduire un effet de filtrage.

Les pôles du filtre définis par un polynôme $F(z)$ doivent aussi être les pôles du système en boucle fermée.
Dans ce cas on remplace

$$H_D^+(z) \rightarrow H_D^+(z)F(z)$$

Attention : Ce changement doit se faire également dans le calcul de $T(z)$ et il faut vérifier la cohérence des ordres des polynômes de l'identité de Bezout.
Si on introduit un filtrage du premier ordre on considère

$$F(z) = 1 + f_1 z^{-1} \qquad -1 < f_1 < 0$$

Ajout de filtres adoucisseurs : exemple

Dans l'exemple précedent on avait : $H_D^+(z) = 1 - a_r z^{-1}$.
on utilise un filtre du premier ordre : $F(z) = 1 + f_1 z^{-1}$
Calcul des nouveaux paramètres :

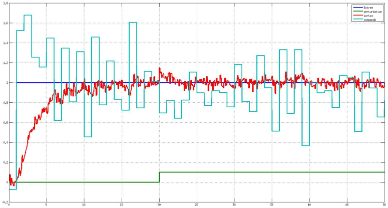
$$F(z)H_D^+(z) = 1 + z^{-1}(-a_r + f_1) + z^{-2}(-a_r f_1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ s_1 \\ r_0 \\ r_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & (1-a) & 0 \\ 0 & -a-1 & 0 & (1-a) \\ 0 & a & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -a_r + f_1 + 1 + a \\ -a - a_r f_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

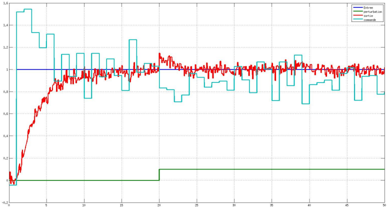
$f_1 = -0.5$; $s_1 = 0$; $r_0 = 3.929$; $r_1 = -2.8436$

Ajout de filtres adoucisseurs ($f_1 = -0.5$)

sans filtrage :



avec $f_1(z) = -0.5$:



Compensation des zéros stables

La présence de zéros non souhaités dans le système corrigé peut conduire à des comportements différents de ceux voulus par le modèle $\frac{B_m}{A_m}$.

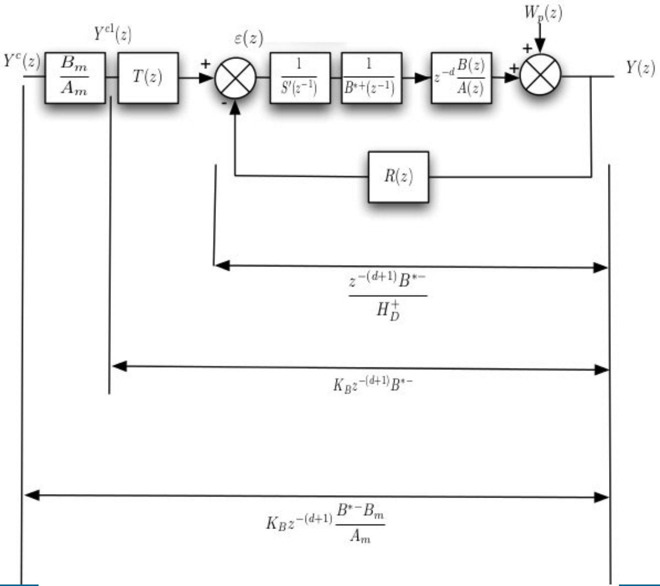
Il est possible de compenser les zéros stables du système en ajoutant des pôles équivalents dans le bloc $S(z)$ du correcteur.

Pour cela, on factorise $B^*(z)$ sous la forme :

$$B^*(z) = B^{*+}(z)B^{*-}(z)$$

La partie positive est alors compensée à travers le polynôme $S(z)$:

$$S(z) = B^{*+}(z)S'(z)$$


$Y^c(z)$
$\frac{B_m}{A_m}$
$Y^{cl}(z)$
$T(z)$
+
-
$\varepsilon(z)$
$\frac{1}{S'(z^{-1})}$
$\frac{1}{B^{*+}(z^{-1})}$
$z^{-d}\frac{B(z)}{A(z)}$
$W_p(z)$
+
+
$Y(z)$
$R(z)$
$\frac{z^{-(d+1)}B^{*-}}{H_D^+}$
$K_B z^{-(d+1)}B^{*-}$
$K_B z^{-(d+1)}\frac{B^{*-}B_m}{A_m}$

Compensation des zéros stables

La fonction de transfert entre Y^c et Y a maintenant pour expression :

$$\frac{Y}{Y^c} = \frac{z^{-(d+1)}B^{*-}}{AS' + z^{-(d+1)}B^{*-}R}$$

D'où l'expression de l'identité de Bezout :

$$AS' + z^{-(d+1)}B^{*-}R = H_D^+$$

La résolution du système s'effectue alors de manière similaire au cas précédent, en remplaçant B par B^{*-}.

Exemple

On souhaite asservir un moteur en position

$$G(p) = \frac{K}{p(1+\tau p)}$$

avec $K = 2.5$, $\tau = 0.8s$ et $T_e = 0.5s$.
On souhaite obtenir le cahier des charges suivant :

- en régulation : $D < 5\%$ et un temps de montée de $1s$.
- en poursuite : $D < 0.1\%$ et un temps de montée de $2s$.
- on souhaite que les réponses respectent précisément ce cahier des charges, on fera donc une compensation des pôles.

Exemple : calcul de $G(z)$

La transmittance du système se met sous la forme :

$$G(z) = \frac{(b_0 + b_1 z^{-1}) z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

avec $b_0 = 0.3205$, $b_1 = 0.2604$, $a_1 = -1.5353$ et $a_2 = 0.5353$.

$$B(z) = z^{-1} B^{*+}(z) B^{*-}(z)$$

calcul du zéro : $z_0 = -\frac{b_1}{b_0} = -0.8124$

d'où : $B^{*-}(z) = 1 \quad \text{et} \quad B^{*+}(z) = b_0 + b_1 z^{-1}$

Forme de $R(z)$ et de $S(z)$

$$l = \max(n, m + d) - 1$$

$$l = \max(2, 1 + 1) - 1 = 1$$

$$R(z) = r_0 + r_1 z^{-1}$$
$$S(z) = 1 + s_1 z^{-1}$$

Exemple : calcul des transittances “cible”

La fonction de transfert cycle en régulation se met sous la forme :

$$H_D^+(z) = 1 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2}$$

La fonction de transfert cycle en poursuite se met sous la forme

$$\frac{B_m(z)}{A_m(z)} = \frac{c_0 + c_1 z^{-1}}{1 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2}}$$

avec : $h_1 = -0.2439$, $h_2 = 0.10$; $c_0 = 0.6836$; $c_1 = 0.1546$; $d_1 = -0.1752$ et $d_2 = 0.0133$.

Exemple : Identité de Bezout

Identité avec compensation des zéros stables :

$$A(z)S(z) + z^{-d}B^{*-}(z)R(z) = 1 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2}$$

Identité sans compensation des zéros stables :

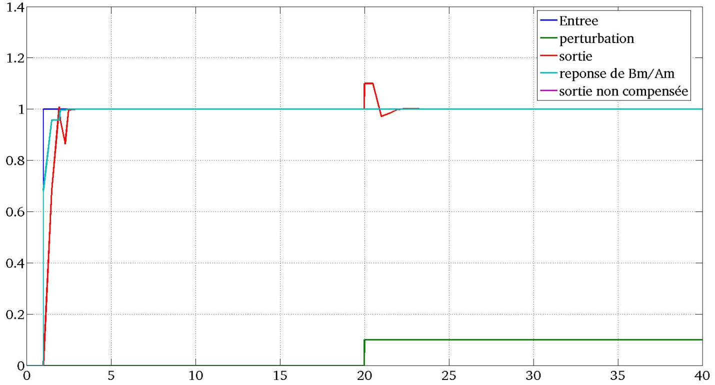
$$A(z)S(z) + z^{-d}B(z)R(z) = 1 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2}$$

On développe :

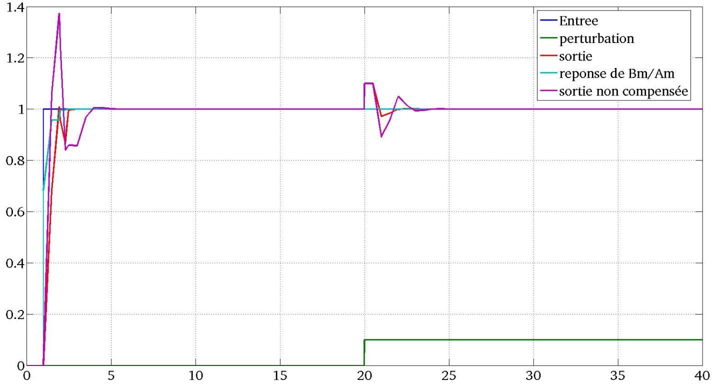
$$1 + z^{-1}(a_1 + s_1 + r_0) + z^{-2}(a_2 + a_1 s_1 + r_1) + z^{-3}(a_2 s_1) = 1 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2}$$

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ r_0 \\ r_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a_1 & 0 & 1 \\ a_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} h_1 - a_1 \\ h_2 - a_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.2913 \\ -0.4353 \end{bmatrix}$$

Exemple : Résultats



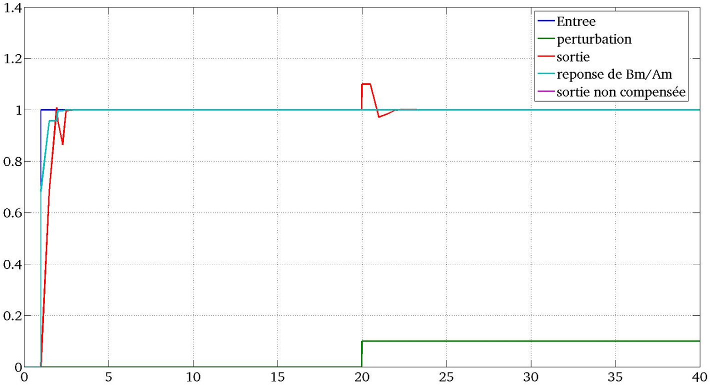
Exemple : Résultats



paramètre du correcteur sans compensation :

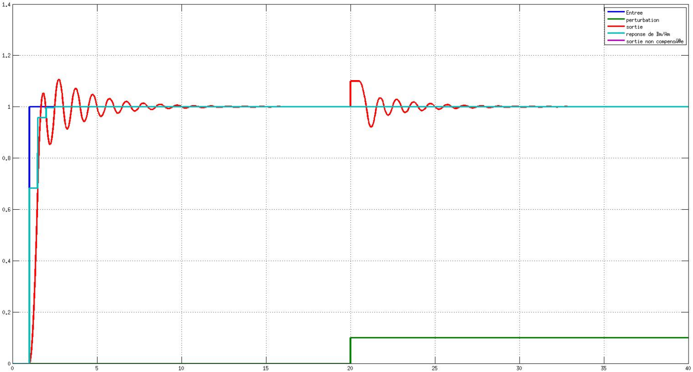
$$s_1 = 0.4937, \; r_0 = 2.4885, \; r_1 = -1.0149, \; T(z) = H_D^+(z)/(b_0 + b_1)$$

Exemple : Impact des paramètres de Simulation



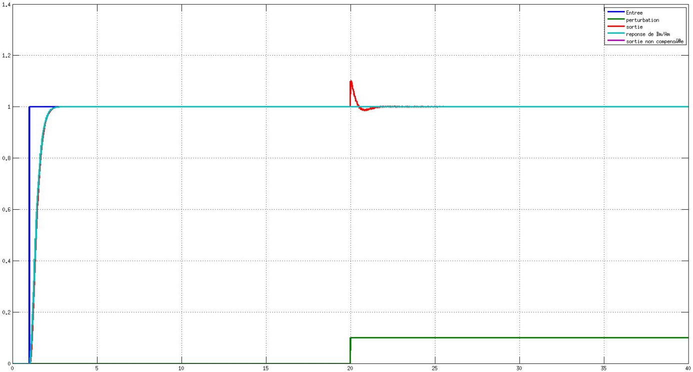
pas de simulation maximal : T_e

Exemple : Impact des paramètres de Simulation



pas de simulation maximal : $T_e/100$

Exemple : Impact des paramètres de Simulation



pas de simulation maximal : $T_e/100$ avec $T_e = 0.05$