

---

# Projet : Amélioration de l'asservissement de visée laser

---

NOTE D'APPLICATION

CONCEPTION THÉORIQUE D'UN CORRECTEUR RST PAR  
PLACEMENT DE PÔLES

*Élève :*  
Yoan DOUARRE

*Enseignant Référent :*  
Jacques Laffont  
*Client :*  
JTL Electronique

# Table des matières

- I Structure RST 2
  
- II Correcteur RST par placement de pôles 4
  - 1 Correcteur simple . . . . . 4
  - 2 Ajout d'intégrateurs et d'adoucisseurs . . . . . 6
  
- III Simulation avec Scilab 7

# Table des figures

- I.1 Structure d'un correcteur RST . . . . . 2
- III.1 Paramètres de Simulation du correcteur RST . . . . . 7
- III.2 Transmittances à potentiellement modifier . . . . . 8

## Introduction

L'objectif de cette note d'application est de présenter la conception théorique basique d'un correcteur RST par placement de pôles, quelques variantes possibles (ajout d'intégrateurs et d'un filtre adoucisseur) et sa simulation à l'aide des scripts Scilab fournis.

Nous commencerons par une brève présentation de ce qu'est un correcteur RST, puis nous aborderons la réalisation théorique d'un correcteur RST par placement de pôles et nous terminerons par un exemple de sa simulation sur Scilab.

## I Structure RST

La structure RST est la structure générique des correcteurs en régulation numérique. Elle se compose de trois blocs, R, S et T dont on souhaite déterminer les coefficients pour obtenir l'asservissement désiré.

L'avantage de cette structure est qu'elle est dite à deux degrés de libertés :

- Objectif en poursuite (par rapport à l'entrée)
- Objectif en régulation (par rapport à une perturbation)

ce qui nous permet d'asservir notre système en lui imposant une dynamique par rapport à la consigne différente de la dynamique par rapport aux perturbations.

À partir de cette structure, on peut synthétiser différents types de correcteurs comme :

- Les PID Numériques
- Les correcteurs par placement de pôles
- Les correcteurs LQG
- ...

La structure d'un correcteur RST [1] qui est donnée comme suit :

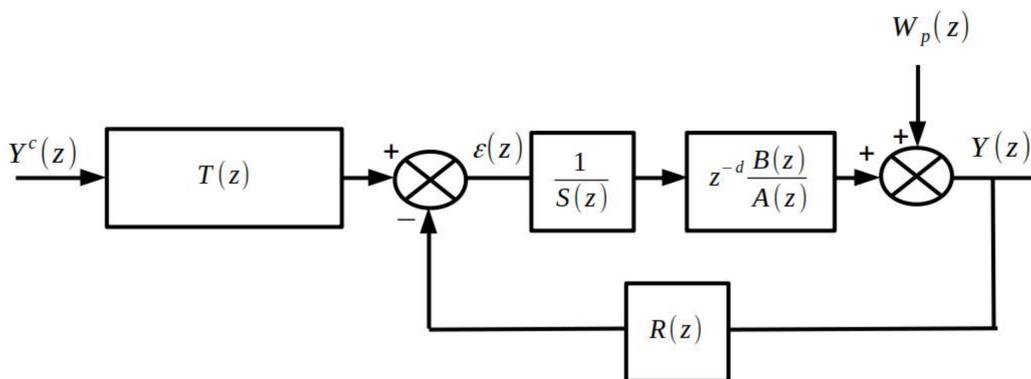


FIGURE I.1 – Structure d'un correcteur RST

avec :

- $R(z)$ ,  $S(z)$  et  $T(z)$  les polynômes dont le degré dépend du type de RST, de l'ordre du système à réguler et dont on doit déterminer les coefficients.
- $z^{-d} \frac{B(z)}{A(z)}$  la transmittance du système à asservir.
- $Y^c(z)$  la consigne.
- $Y(z)$  la réponse du système asservi.
- $\epsilon(z)$  l'erreur entre la consigne et la réponse.
- $W_p(z)$  le bruit sur la sortie.

À partir de cette structure, on peut déterminer la transmittance en poursuite de notre système  $\frac{Y(z)}{Y^c(z)}$  :

$$Y(z) = \frac{z^{-d}B(z)}{A(z)S(z)}\epsilon(z)$$

$$Y(z) = \frac{z^{-d}B(z)}{A(z)S(z)}(T(z)Y^c(z) - R(z)Y(z))$$

$$\left(1 + \frac{z^{-d}B(z)R(z)}{A(z)S(z)}\right) Y(z) = \frac{z^{-d}B(z)T(z)}{A(z)S(z)}Y^c(z)$$

$$\frac{Y(z)}{Y^c(z)} = \frac{z^{-d}B(z)T(z)}{A(z)S(z) + z^{-d}B(z)R(z)}$$

ainsi que celle en régulation  $\frac{Y(z)}{W_p(z)}$  :

$$Y(z) = W_p(z) - \frac{z^{-d}B(z)R(z)}{A(z)S(z)}Y(z)$$

$$\left(1 + \frac{z^{-d}B(z)R(z)}{A(z)S(z)}\right) Y(z) = W_p(z)$$

$$\frac{Y(z)}{W_p(z)} = \frac{A(z)S(z)}{A(z)S(z) + z^{-d}B(z)R(z)}$$

## II Correcteur RST par placement de pôles

Pour l'asservissement du système de visée laser, nous avons fait le choix d'un correcteur RST par placement de pôles. Ce type de correcteur permet de piloter des systèmes d'ordre quelconque pouvant contenir des retards élevés et de fixer des objectifs différents pour la poursuite et la régulation.

L'objectif de ce correcteur est de trouver les polynômes R, S et T permettant d'imposer :

$$\frac{Y(z)}{Y^c(z)} = \frac{z^{-d}B(z)T(z)}{A(z)S(z) + z^{-d}B(z)R(z)} = F_p(z)$$

$$\frac{Y(z)}{Y^c(z)} = \frac{z^{-d}B(z)T(z)}{A(z)S(z) + z^{-d}B(z)R(z)} = F_{reg}(z)$$

Les transmittances  $F_p(z)$  et  $F_{reg}(z)$  peuvent être d'ordre quelconque mais sont généralement choisis d'ordre 2 pour être caractérisés par un gain  $K$ , un temps de montée  $t_m$  et un facteur d'amortissement  $\xi$ .

### 1 Correcteur simple

Pour concevoir le correcteur, il faut dans un premier temps calculer les transmittances en poursuite et en régulation souhaitées, qui seront d'ordre 2 dans notre cas.

Pour rappel, une fonction de transfert d'ordre 2 suit l'équation suivante :

$$G(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi p}{\omega_n} + \frac{p^2}{\omega_n^2}}$$

En utilisant les abbaques de l'annexe I et II, on peut choisir  $\xi$  pour imposer le dépassement du système qui nous donnera alors la valeur numérique du produit  $\omega_n t_m$ . Il ne manquera alors plus qu'à calculer le  $\omega_n$  correspondant au temps de montée souhaité.

Une fois la fonction de transfert en continu définie, il faut la convertir en transmittance :

$$G(z) = \frac{z^{-d}(b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} \dots + b_m z^{-m})}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}}$$

Pour cela, il faut définir la période à laquelle le système discret sera échantillonné puis on utilise les formules propres à notre type de système continu présentes dans l'annexe III et enfin par identification, nous obtenons nos coefficients discrets.

Dans notre cas, nous avons pris pour la dynamique en poursuite :

- $K = 1$  car nous voulons que le laser atteigne la consigne.
- $\xi = 0.9$  pour n'avoir quasiment aucun dépassement et ainsi ne pas avoir d'oscillations visibles du laser.

- $t_m = 400\mu s$  pour répondre au cahier des charges.

et pour la dynamique en régulation :

- $K$  n'a pas d'importance car ne sera pas utilisé pour le calcul du correcteur.
- $\xi = 0.7$  pour un bon compromis pour ne pas avoir de gros pics sur la commande.
- $t_m = 270\mu s$  pour corriger les perturbations plus vite que la poursuite.

Les calculs de transmittances ont été réalisés pour  $T_e = 10\mu s$  qui est la période d'échantillonnage à laquelle fonctionne la carte lorsqu'elle affiche la matrice.

Pour la suite de ce chapitre, nous appellerons  $F_p(z) = \frac{B_m(z)}{A_m(z)}$  la transmittance cible en poursuite et  $F_{reg}(z) = \frac{H_N(z)}{H_D(z)}$  la transmittance cible en régulation où  $B_m(z)$  et  $H_N(z)$  correspondent aux numérateurs des fonctions et  $A_m(z)$  et  $H_D(z)$  aux dénominateurs.

Maintenant transmittances sont calculées, on peut commencer les calculs des coefficients du correcteur :

On rappelle que la transmittance en régulation est :

$$\frac{Y(z)}{W_p(z)} = \frac{A(z)S(z)}{A(z)S(z) + z^{-d}B(z)R(z)} = \frac{H_N(z)}{H_D(z)}$$

où chaque polynôme est de la forme :

$$K(z) = k_0 + k_1z^{-1} + k_2z^{-2} + \dots + k_nz^{-n}$$

et dont l'ordre dépend du système à asservir et des dynamiques désirées.

La dynamique du système étant liée aux pôles, nous ne nous préoccupons pas de  $H_N(z)$  et nous souhaitons uniquement résoudre l'équation diophantienne (également appelée l'identité de Bézout) :

$$\boxed{A(z)S(z) + z^{-d}B(z)R(z) = H_D(z)}$$

La résolution de l'identité de Bézout nous permet d'obtenir les coefficients des polynômes  $S(z)$  et  $R(z)$ .

On peut dorénavant s'intéresser à la transmittance en poursuite de notre système :

$$\frac{Y(z)}{Y^c(z)} = \frac{z^{-d}B(z)T(z)}{A(z)S(z) + z^{-d}B(z)R(z)} = T(z)\frac{z^{-d}B(z)}{H_D(z)}$$

dont on voudrait idéalement :

$$\frac{Y(z)}{Y^c(z)} = T(z)\frac{z^{-d}B(z)}{H_D(z)} = \frac{B_m(z)}{A_m(z)}$$

Il faudrait alors imposer :

$$T_{ideal}(z) = \frac{B_m(z)H_D(z)}{A_m(z)z^{-d}B(z)}$$

Malheureusement, les pôles instables de  $B(z)$  rendent cette équation inutilisable et nous préférons alors imposer le  $T(z)$  suivant :

$$T(z) = K_B \frac{B_m(z)H_D(z)}{A_m(z)}$$

avec  $K_B = \frac{1}{B(1)}$  qui permet de compenser l'effet statique de  $B(z)$ .

Le modèle obtenu ne sera donc pas le modèle idéal mais en sera proche :

$$\boxed{\frac{Y(z)}{Y^c(z)} = T(z) \frac{z^{-d}B(z)}{H_D(z)} = K_B \frac{B_m(z)z^{-d}B(z)}{A_m(z)}}$$

## 2 Ajout d'intégrateurs et d'adoucisseurs

En reprenant les étapes ci-dessus en modifiant l'identité de Bézout à résoudre, il est possible d'ajouter des intégrateurs purs mais également de filtrer le signal de mesure de la réponse du système qui en pratique, est toujours bruitée.

Pour cela, on imposera :

$$\boxed{S(z) = (1 - z^{-1})^g S'(z)}$$

$$\boxed{F_{reg}(z) = \frac{H_N(z)}{H_D(z)F(z)}}$$

avec :

- $(1 - z^{-1})^g$  les intégrateurs purs ajoutés ( $g$  est le nombre d'intégrateurs).
- $F(z)$  le dénominateur d'un filtre numérique de la forme  $F(z) = 1 + f_1 z^{-1} + \dots + f_n z^{-n}$

L'identité de Bézout devient alors :

$$\boxed{A(z)(1 - z^{-1})^g S'(z) + z^{-d}B(z)R(z) = H_D(z)F(z)}$$

On cherchera alors à déterminer les coefficients de  $S'(z)$  et  $R(z)$ .

On modifiera également  $T(z) = K_B \frac{B_m(z)H_D(z)F(z)}{A_m(z)}$  pour ne pas modifier le comportement en poursuite.

*Il existe d'autres variantes permettant de réduire le degré des polynômes à déterminer et de minimiser l'impact de l'approximation de la transmittance en poursuite avec la compensation des zéros stables mais que nous n'avons pas utilisé pour notre projet car tous les systèmes identifiés n'avaient que des zéros instables.*

### III Simulation avec Scilab

Le script *Simulation\_RST\_theorique.sci* permet de réaliser le calcul des coefficients RST avec ou sans intégrateur et filtre passe-bas d'ordre 2, pour un système à asservir d'ordre 3 et des fonctions de transfert cibles d'ordre 2 ainsi que la simulation du correcteur avec ou sans bruit et saturation.

Si vous êtes dans cette configuration, vous pouvez simuler une correction RST pour n'importe quelle période d'échantillonnage car les conversions de continu à discret sont intégrées.

Il vous suffit alors de renseigner l'ensemble des paramètres ci-dessous :

```

6 //-----Paramètres de simulation-----
7
8 Te=10e-6; // Période d'échantillonnage
9 N=5*800e-6/Te; //Nombre de points à simuler
10
11 //Consigne du système
12 K=2000;
13 u=K*[ones(N/5,1);2*ones(N/5,1);3*ones(N/5,1);2*ones(N/5,1);ones(N/5,1)];
14 u1=u-0.01*K;
15 u2=u+0.01*K;
16
17 //Paramètres continus du système identifié
18 X=[-5.2378411; //K
19    -0.0000310; //Tau
20     0.6870529; //Xi
21    -0.0030284] //tm
22 ---
23 //Paramètres continus de la fonction cible en poursuite
24 Xp=[1; //K
25     -0.9; //Xi
26     400e-6] //tm
27 ---
28 //Paramètres continus de la fonction cible en regulation
29 Xreg=[1; //K
30       -0.7; //Xi
31       270e-6]; //tm
32 ---
33 //Paramètres continus du système réel (pour tester l'impact de l'inexactitude de l'identification)
34 Xreel=[-5.2378411; //K
35         0.0000310; //Tau
36         -0.6870529; //Xi
37         0.0030284] //tm
38
39
40 n=0; //nombre d'intégrateurs dans le RST
41 filtre = 1; //ajout d'un filtre passe-bas d'ordre 2
42 fc=4000; //fréquence de coupure du filtre
43
44 saturation = 0; //Ajout de la saturation du système lors de la simulation
45 variance_bruit = 10; //Ajout d'un bruit blanc sur la réponse du système

```

FIGURE III.1 – Paramètres de Simulation du correcteur RST

Le script utilisera ces paramètres pour résoudre l'identité de Bézout à l'aide de la fonction *mdiophant()* de M. Laffont et ainsi obtenir  $S(z)$  et  $R(z)$  puis de calculer  $T(z)$ . Il pourra alors simuler le comportement théorique du correcteur à l'aide de la fonction *filter()*, ce qui vous permettra d'accéder à l'ensemble des signaux à chaque itération, mais également la réponse que l'on obtiendra avec la conception du correcteur RST avec des registres à décalages en VHDL.

Si vous souhaitez réaliser des tests pour des systèmes différents de ceux actuellement utilisés, il faudra modifier les transmittances *l.84* à *88* pour les remplacer par les transmittances désirées.

```
84 B=G_q.num;
85 A=G_q.den;
86 Bm=F_cible_q.num;
87 Am=F_cible_q.den;
88 Hdq=1+h1*q+h2*q^2
```

FIGURE III.2 – Transmittances à potentiellement modifier

## Références

- [1] Sébastien Lengagne. *Correction des systèmes linéaires échantillonnés*. Support de cours. Polytech Clermont. [s.d.]. Disponible sur : [https://ent.uca.fr/moodle/pluginfile.php/1384211/mod\\_resource/content/2/Auro3\\_Seance.pdf](https://ent.uca.fr/moodle/pluginfile.php/1384211/mod_resource/content/2/Auro3_Seance.pdf) (2024).
- [2] M. Rivoire et J-L. Ferrier. *Cours d'automatique*. Tome 2. [Nouvelle Édition]. Paris : Eyrolles. 1996. 172p.

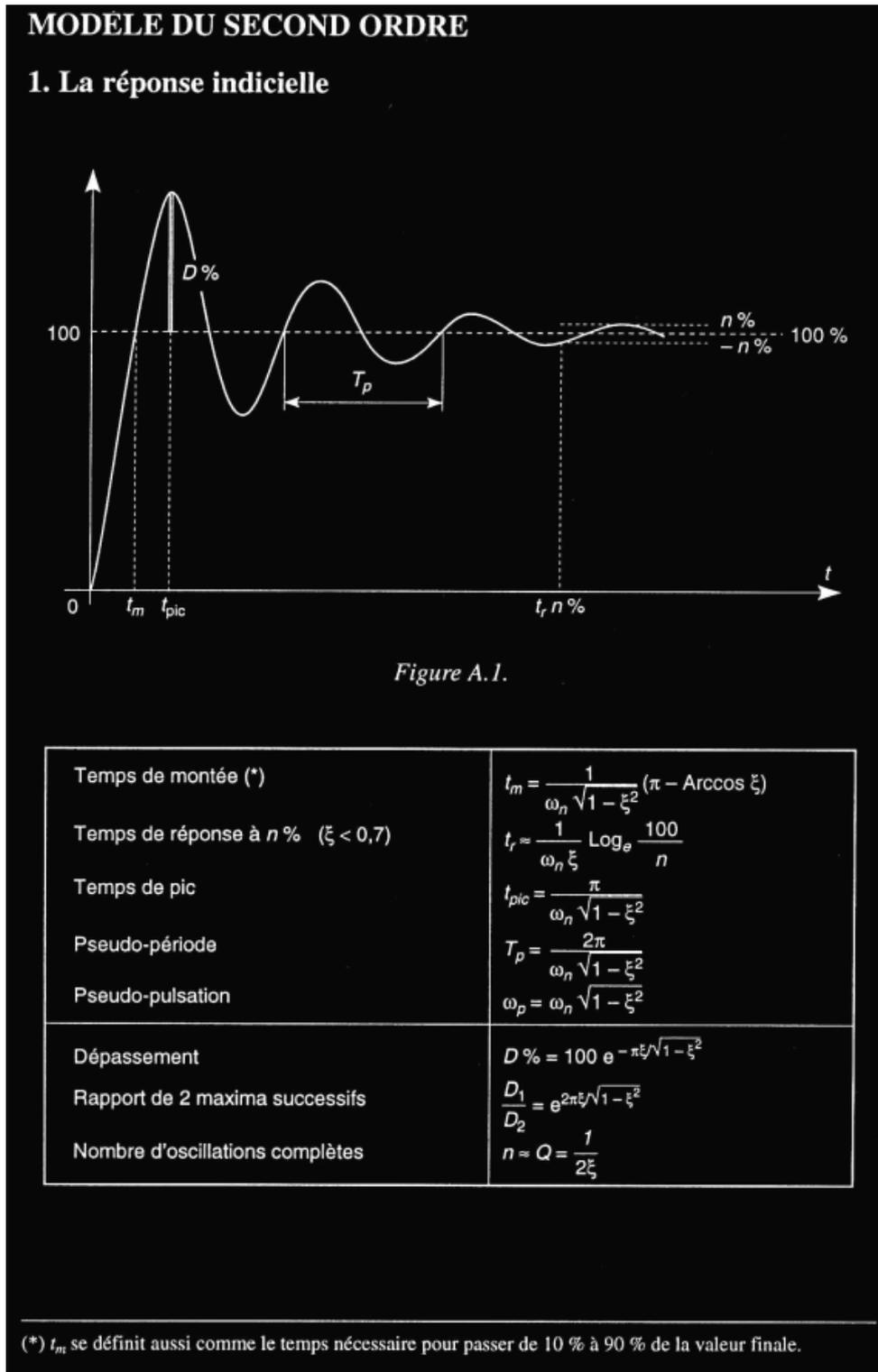
# Annexes

## Table des annexes

Annexe 1 : Modèle du second ordre .....	I
Annexe 2 : Tableau des valeurs numériques des paramètres du second ordre .....	II
Annexe 3 : Table des transformées en z des systèmes classiques précédés d'un bloqueur d'ordre 0 .....	III

*Les scripts Scilab ont été réalisés sur la version Scilab 2024.1.0.*

## Annexe 1 : Modèle du second ordre



Annexe 1 - Modèle du second ordre [2]

## Annexe 2 : Tableau des valeurs numériques des paramètres du second ordre

**Le tableau des valeurs numériques**

Amortissement inférieur à 1										
$\xi$	Paramètres temporels					Paramètres fréquentiels				$\xi$
	$t_m \omega_n$	$t_r \omega_n$ (5 %)	$t_{pic} \omega_n$	$T_p \omega_n$	D %	$\frac{\omega_R}{\omega_n}$	$\frac{\omega_c}{\omega_n}$	$\frac{\omega_c}{\omega_R}$	$M_{dB}$	
0,1	1,68	30	3,16	6,31	73	0,99	1,54	1,56	14	0,1
0,15	1,74	20	3,18	6,36	62	0,98	1,53	1,56	10,5	0,15
0,2	1,81	14	3,21	6,41	53	0,96	1,51	1,57	8,1	0,2
0,25	1,88	11	3,24	6,49	44	0,94	1,48	1,59	6,3	0,25
0,3	1,97	10,1	3,29	6,59	37	0,91	1,45	1,61	4,8	0,3
0,35	2,06	7,9	3,35	6,71	31	0,87	1,42	1,63	3,6	0,35
0,4	2,16	7,7	3,43	6,86	25	0,82	1,37	1,67	2,7	0,4
0,45	2,28	5,4	3,52	7,04	21	0,77	1,33	1,72	1,9	0,45
0,5	2,42	5,3	3,63	7,26	16	0,71	1,27	1,80	1,2	0,5
0,55	2,58	5,3	3,76	7,52	12,6	0,63	1,21	1,93	0,7	0,55
0,6	2,77	5,2	3,93	7,85	9,5	0,53	1,15	2,17	0,3	0,6
0,65	3,00	5,0	4,13	8,27	6,8	0,39	1,08	2,74	0,1	0,65
0,7	3,29	3	4,40	8,80	4,6	0,14	1,01	7,14	0	0,7
0,75	3,66	3,1	4,75	9,50	2,84	–	0,94	–	–	0,75
0,80	4,16	3,4	5,24	10,5	1,52	–	0,87	–	–	0,80
0,85	4,91	3,7	5,96	11,93	0,63	–	0,81	–	–	0,85
0,90	6,17	4	7,21	14,41	0,15	–	0,75	–	–	0,90
0,95	9,09	4,1	10,06	20,12	0,01	–	0,69	–	–	0,95

Annexe 2 - Tableau des valeurs numériques des paramètres du second ordre [2]

## Annexe 3 : Table des transformées en z des systèmes classiques précédés d'un bloqueur d'ordre 0

$T_e$  est la période d'échantillonnage et  $a = e^{-T_e/\tau}$ .

Transmittance en $p$	Transmittance en $z$
$\frac{B_0(p)}{p}$	$\frac{T_e}{z-1}$
$\frac{B_0(p)}{1+\tau p}$	$\frac{1-a}{z-a}$
$\frac{B_0(p)}{p(1+\tau p)}$	$\frac{(T_e - \tau(1-a))z + (\tau(1-a) - aT_e)}{z^2 + (-1-a)z + a}$
$\frac{B_0(p)}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$	$\frac{b_1 z + b_0}{z^2 - (e^{-T_e/\tau_1} + e^{-T_e/\tau_2})z + e^{-T_e/\tau_1}e^{-T_e/\tau_2}}$ $b_1 = \frac{\tau_1(1 - e^{-T_e/\tau_1}) - \tau_2(1 - e^{-T_e/\tau_2})}{\tau_1 - \tau_2}$ $b_0 = e^{-T_e/\tau_1}e^{-T_e/\tau_2} - \frac{\tau_1 e^{-T_e/\tau_2} - \tau_2 e^{-T_e/\tau_1}}{\tau_1 - \tau_2}$
$\frac{B_0(p)}{(1+\tau p)^2}$	$\frac{1-a}{z-a} - \frac{T_e}{\tau} \frac{a(z-1)}{(z-a)^2}$
$\frac{B_0(p)}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n}p + \frac{1}{\omega_n^2}p^2}$ $\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$ $\xi < 1$	$\frac{b_0 + b_1 z}{z^2 - 2ze^{-\xi\omega_n T_e} \cos \omega_p T_e + e^{-2\xi\omega_n T_e}}$ $b_0 = e^{-2\xi\omega_n T_e} + e^{-\xi\omega_n T_e} \left( \frac{\xi \sin(\omega_p T_e)}{\sqrt{1 - \xi^2}} - \cos(\omega_p T_e) \right)$ $b_1 = 1 - e^{-\xi\omega_n T_e} \left( \frac{\xi \sin(\omega_p T_e)}{\sqrt{1 - \xi^2}} + \cos(\omega_p T_e) \right)$

Annexe 3 - Table des transformées en z des systèmes classiques précédés d'un bloqueur d'ordre 0 [2]