

Note d'application

LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

Projet : Modélisation, simulation et optimisation d'un moteur roue

Polytech'Clermont-Ferrand

Jaouad
FARIS

GE5A : 2013/2014

Table des matières des illustrations et des tableaux

La méthode des éléments finis	1
1. Introduction.....	1
2. Les étapes de la réalisation	1
3. Déroulement d'une étude.....	6
4. Les transformations.....	8
COMSOL.....	10
Bibliographie	13

Figure 1: Erreur de discrétisation géométrique.....	2
Figure 2: les éléments triangulaires	3
Figure 3 : Transformation géométrique linéaire d'un carré.....	8
Figure 4: La définition du maillage	11

Tableau 1: Les constants.....	10
Tableau 2: Les paramétrages des sous-domaines.....	10
Tableau 3: Le paramétrage des limites.....	11

La méthode des éléments finis

1. Introduction

Les codes éléments finis font maintenant partie des outils couramment utilisés lors de la conception et à l'analyse des produits industriels. Les outils d'aide à la modélisation devenant de plus en plus perfectionnés, l'utilisation de la méthode des éléments finis s'est largement développée.

Malgré la fiabilité des algorithmes et la robustesse de la méthode, l'ingénieur devra répondre s'il veut effectuer une analyse par éléments finis dans de bonnes conditions :

- formaliser les non-dits et les réflexions qui justifient les choix explicites ou implicites de son analyse du problème ;
- évaluer la confiance qu'il accorde aux résultats produits ;
- analyser les conséquences de ces résultats par rapport aux objectifs visés.

2. Les étapes de la réalisation

Les principales étapes de construction d'un modèle éléments finis sont les suivantes :

1) discrétisation du milieu continu en sous domaines ;

Cette opération consiste à procéder à un découpage du domaine continu en sous domaines élémentaires :

$$\text{Domaine} = \sum_{e=1}^N \text{domaines élémentaires}$$

$$\lim_{e \rightarrow 0} (\text{Union des domaines élémentaires}) = \text{Domaine}$$

Il faut donc pouvoir représenter au mieux la géométrie souvent complexe du domaine étudié par des éléments de forme géométrique simple. Il ne doit y avoir ni recouvrement ni trou entre deux éléments ayant une frontière commune.

Lorsque la frontière du domaine est complexe, une erreur de discrétisation géométrique est inévitable. Cette erreur doit être estimée, et éventuellement réduite en modifiant la forme ou en diminuant la taille des éléments concernés comme proposé sur la figure 2.1. Sur chaque élément nous allons chercher à définir une approximation de la fonction solution.

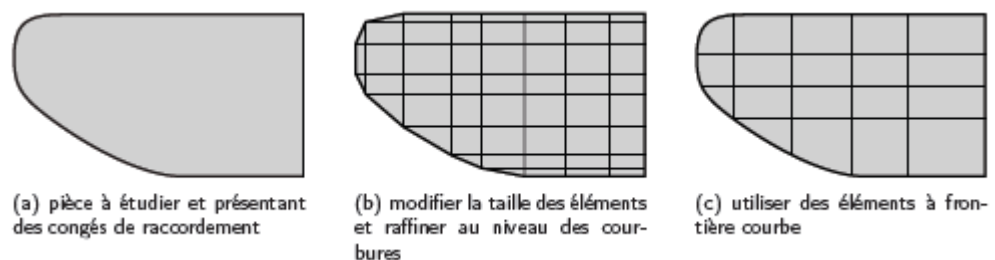


Figure 1: Erreur de discrétisation géométrique

2) construction de l'approximation nodale par sous domaine :

La méthode des éléments finis est basée sur la construction systématique d'une approximation u_h du champ des variables u par sous domaine. Cette approximation est construite sur les valeurs approchées du champ aux nœuds de l'élément considéré, on parle de représentation nodale de l'approximation ou plus simplement d'approximation nodale.

Définition de l'approximation nodale

L'approximation par éléments finis est une approximation nodale par sous domaines ne faisant intervenir que les variables nodales du domaine élémentaire De :

$$\forall M \in De, u_h(M) = \mathbf{N}(M) \cdot \mathbf{u}_n$$

Où $u_h(M)$ représente la valeur de la fonction approchée en tout point M de l'élément et \mathbf{N} , la matrice ligne des fonctions d'interpolation de l'élément \mathbf{u}_n variables nodales relatives aux nœuds d'interpolation de l'élément.

Pour notre étude nous avons utilisée des domaines élémentaires de formes triangulaires.

Ainsi pour ce type d'élément, l'approximation utilise la base polynomiale linéaire $(1, s, t)$. L'élément de référence, aussi dit *parent*, est un triangle rectangle à trois nœuds de type « T3 ». L'approximation

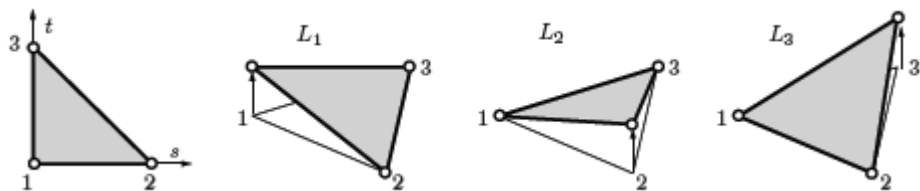


Figure 2: les éléments triangulaires

Posons $L1 = 1 - s - t$, $L2 = s$ et $L3 = t$. Pour :

- les trois noeuds sommet $i = 1, 2, 3$, les fonctions de forme s'écrivent :

$$\mathbf{N}_i = \mathbf{L}_i \cdot (2\mathbf{L}_i - 1)$$

3) calcul des matrices élémentaires correspondant à la forme intégrale du problème.

Celles-ci sont définies dans notre cas par la base de données que fournit le logiciel COMSOL®, en utilisant les équations concernant la magnétostatique.

Le champ magnétique :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv'$$

Les forces électromagnétiques :

$$\mathbf{f}_{em} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}$$

Avec :

La densité de charge : $\rho = \nabla \cdot \mathbf{D} = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}$

\mathbf{E} : le champ électrique

\mathbf{J} : La densité de courant

4) assemblage des matrices élémentaires.

5) prise en compte des conditions aux limites :

Les règles d'assemblage sont définies par la relation :

$$Domaine \cong \sum_{e=1}^N D_{\text{élémentaires}}$$

Attention à ne pas oublier l'erreur de discrétisation géométrique.

L'assemblage des matrices élémentaires s'effectue selon les mêmes règles. Ces règles sont définies par sommation des termes correspondant à ce qu'on a calculé pour chaque élément :

Les conditions limites entre 2 domaines sont définies par exemple :

Pour le champ magnétique :

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{n} \times \mathbf{H}_0$$

Pour le courant surfacique :

$$-\mathbf{n} \times \mathbf{H} = J_{sz} \mathbf{e}_z \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = J_{sz} \mathbf{e}_z$$

Pour l'isolation magnétique :

$$A_z = 0$$

Ce qui met le potentiel magnétique à 0 au niveau de la frontière.

Remarque : Toutes ces équations ne sont pas saisies sous COMSOL car ce logiciel permet de les avoir toutes définies auparavant, et il suffit de modéliser la physique du moteur qu'on veut étudier (dans notre cas) et définir le domaine d'étude pour que le logiciel sélectionne les équations nécessaires.

De plus ces équations ne sont que des exemples, ce ne sont pas les seules qui doivent être résolus. En outre, il faut faire des transformations pour le calcul de chaque matrice élémentaires correspondant à chaque élément.

6) résolution du système d'équations.

Plusieurs solveurs existent et chacun de ses solveurs a ses caractéristiques :

- formes de la modélisation (symétries)
- mémoire disponible sur ordinateur
- Linéarité du problème
- Etc.

3. Déroulement d'une étude

Pour réaliser une étude par éléments finis, il faut que les objectifs de l'étude soient bien définis

Le cadre de l'étude, c'est-à-dire le temps et les moyens disponibles, doit être compatible avec les objectifs et la précision cherchée. Supposons toutes ces conditions remplies, l'étude proprement dite est organisée de façon logique selon les étapes suivantes :

Analyse du problème

Cette analyse doit fixer les paramètres du calcul et conduire à la réalisation d'un maillage.

Cette phase basée sur l'expérience personnelle acquise dépend de nombreuses considérations. La difficulté essentielle est de trouver un bon compromis entre les paramètres propres au problème et ceux relatifs à l'environnement de travail. L'analyse du problème nous conduit à préciser un certain nombre d'hypothèses, et à effectuer des choix qui conditionnent les résultats.

Choix du modèle

En calcul des structures, les plus classiques sont de type : poutre, élasticité plane, axisymétrique, coques mince ou épaisse, tridimensionnel... À ces modèles mathématiques correspondent des familles d'éléments finis.

Choix du type d'éléments

Il est fonction de la précision voulue, de la nature du problème, mais aussi du temps disponible.

On choisira les éléments les mieux adaptés dans les familles disponibles.

Choix du maillage

Il dépend essentiellement de la géométrie, des sollicitations extérieures, des conditions aux limites à imposer, mais aussi des informations recherchées : locales ou globales. Sans oublier bien entendu le type d'outils dont on dispose pour réaliser ce maillage.

Hypothèses de comportement

Quel modèle retenir pour représenter le comportement du matériau. Le calcul est-il linéaire ? Doit-on modéliser l'amortissement ? Si le matériau est hétérogène ou composite, peut-on utiliser une méthode d'homogénéisation ? Peut-on traduire l'incompressibilité du milieu ?

Exécution du calcul

Ce bloc, le plus coûteux en temps machine est souvent exécuté en tâche de fond. Un fichier de résultats permet de vérifier que les différentes phases de calculs se sont correctement déroulées :

- interprétation des données, vérification des paramètres manquants ;
- construction des matrices, espace utile pour les gros problèmes ;
- singularité de la matrice raideur, problème de conditions aux limites ou de définition des éléments ;
- convergence, nombre d'itérations, etc.

Exploitation des résultats

Les calculs demandés dans le cahier des charges ont le plus souvent pour objectif de valider ou de vérifier le dimensionnement d'une structure. Les résultats obtenus et les conclusions relatives aux phénomènes à étudier devront être présentés de façon synthétique : tableaux, courbes, visualisation. Cela justifie largement l'utilisation d'un post-processeur, qui propose des outils pour sélectionner les informations que l'on veut étudier.

Attention, lors de l'utilisation de ces outils, il faut savoir ce que cache l'information qui vous est proposée graphiquement, sachant que celle-ci est construite à partir de résultats discrets :

- valeur moyenne sur un élément : comment est-elle définie ?
- valeur maximale sur l'élément : comment est-elle calculée ?
- valeurs aux nœuds (écarts entre les éléments) : à quoi correspondent-elles ?

4. Les transformations

4.1. La transformation géométrique

Tout élément réel peut être défini comme l'image par une transformation géométrique d'un élément parent dit de référence pour lequel les fonctions d'interpolation sont connues. À l'image de la figure 2.6, la transformation géométrique définit les coordonnées (x, y, z) de tout point de l'élément réel à partir des coordonnées (s, t, u) du point correspondant de l'élément de référence soit :

$$\begin{matrix} D_{\text{référence}} \\ (s, t, u) \end{matrix} \xrightarrow{\tau_e} \begin{matrix} D_{\text{réel}} \\ (x, y, z) \end{matrix}$$

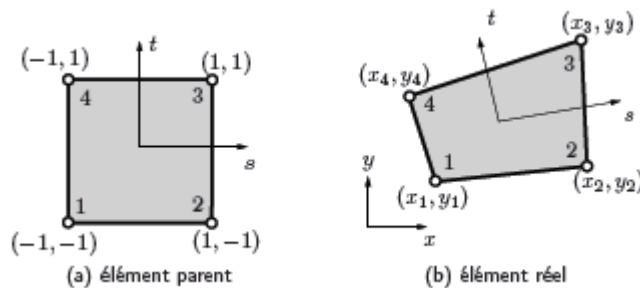


Figure 3 : Transformation géométrique linéaire d'un carré

Un même élément de référence permettra de générer une classe d'éléments réels. À chaque élément réel correspond une transformation géométrique différente, cette transformation devant être une bijection. Chaque transformation géométrique dépend des coordonnées des nœuds géométriques de l'élément réel. Pour les éléments les plus simples, la transformation est identique pour chaque coordonnée, et utilise une base de fonctions polynomiales.

4.2. Matrice jacobéenne et transformation des opérateurs de dérivation

Les expressions des matrices élémentaires font apparaître des opérateurs différentiels appliqués aux fonctions d'interpolation. Or, en pratique, nous connaissons les dérivées des fonctions d'interpolation par rapport aux coordonnées de l'élément de référence (s, t, u). Il faut donc exprimer les dérivées des fonctions d'interpolation par rapport aux coordonnées réelles (x, y, z). Posons :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial u} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \mathbf{J} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

\mathbf{J} est la matrice jacobéenne de la transformation. Pour chaque élément, cette matrice s'exprime en fonction des dérivées des fonctions connues de transformation géométrique et des coordonnées des nœuds géométriques de l'élément réel. En effet :

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial u} \end{pmatrix} (x \ y \ z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}_g}{\partial s} \\ \frac{\partial \mathbf{N}_g}{\partial t} \\ \frac{\partial \mathbf{N}_g}{\partial u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_n & \mathbf{y}_n & \mathbf{z}_n \end{bmatrix}$$

\mathbf{J} est le produit d'une matrice ($3 \times n$) par une matrice ($n \times 3$) toutes deux connues. La transformation devant être une bijection \mathbf{J}^{-1} existe. La relation inverse permet alors de calculer les dérivées premières par rapport aux coordonnées réelles des fonctions d'interpolation :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial u} \end{pmatrix}$$

Ainsi les matrices élémentaires peuvent être calculées dans tous les éléments de la structure maillée.

COMSOL

Sous COMSOL, on définit seulement certains paramètres et non toutes les équations à résoudre, après avoir modéliser la géométrie de la structure voulue.

On définit :

1) Les constantes

Tableau 1: Les constantes.

NAME	EXPRESSION	DESCRIPTION
muFe	2e3	Perméabilité relative de l'acier
sigFe	1.03e7 [S/m]	Conductivité de l'acier
sigCu	5.99e7 [S/m]	Conductivité du cuivre
Br	1.57 [T]	Densité du flux rémanent des aimants
Jin	3e6 [A/m ²]	Densité de courant

2) Les sous-domaines

Tableau 2: Les paramétrages des sous-domaines

Sous-Domains	σ (Conductivité électrique)	μ_r (Perméabilité relative)	Br (Densité de flux rémanent)	Je (Densité de courant externe)
Air ($B = \mu_0 * \mu_r * H$)	1	1	0	0
Acier ($B = \mu_0 * \mu_r * H$)	sigFe	muFe	0	0
Aimants (1) $B = \mu_0 * \mu_r * H + Br$	sigFe	1	Br	0
Aimants (2) $B = \mu_0 * \mu_r * H + Br$	sigFe	1	-Br	0
Conducteur (1)(1) ($B = \mu_0 * \mu_r * H$)	sigCu	1	0	Jin
Conducteur (1)(2) ($B = \mu_0 * \mu_r * H$)	sigCu	1	0	-Jin
Conducteur (1)(3) ($B = \mu_0 * \mu_r * H$)	sigCu	1	0	$Jin * \exp((-j * 2 * \pi) / 3)$
Conducteur (2)(1) ($B = \mu_0 * \mu_r * H$)	sigCu	1	0	$-Jin * \exp((-j * 2 * \pi) / 3)$

Conducteur (2)(2) ($B = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot H$)	sigCu	1	0	$J_{in} \cdot \exp((-j \cdot 4 \cdot \pi)/3)$
Conducteur (2)(3) ($B = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot H$)	sigCu	1	0	$-J_{in} \cdot \exp((-j \cdot 4 \cdot \pi)/3)$

3) Les limites

Tableau 3: Le paramétrage des limites

Paramètres	Aimants + Conducteurs + Aciers	Faces latérales externes	Toutes les autres faces externes
Condition limite	Continuité	Condition périodique type de périodicité : Continuité	Isolation Magnétique

4) Le maillage :

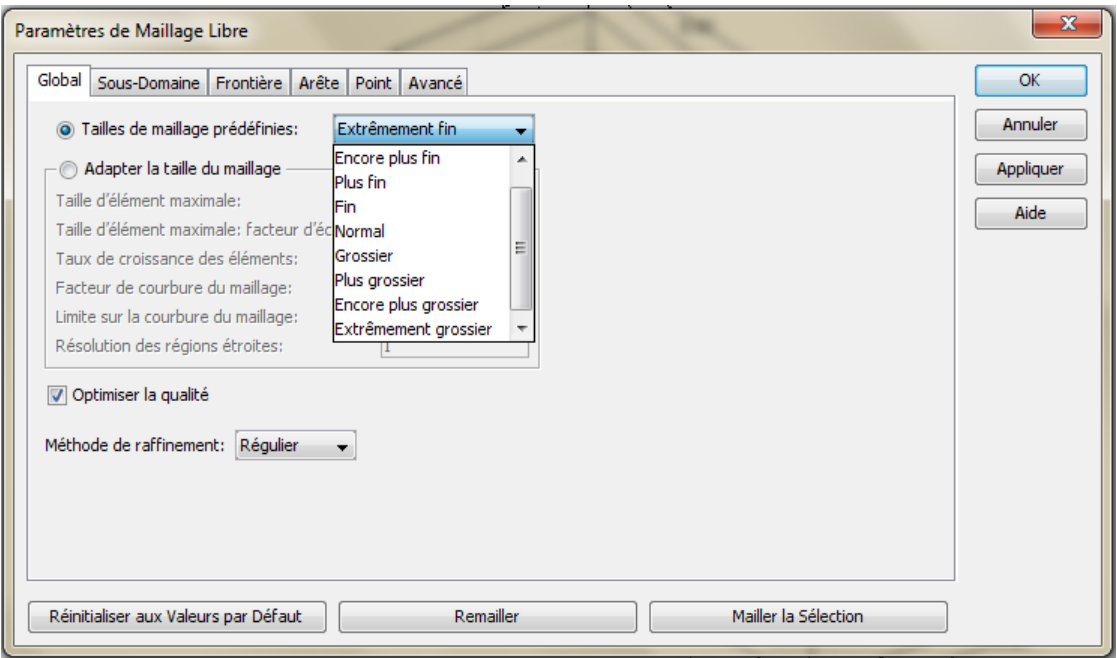


Figure 4: La definition du maillage

5) La résolution du problème :

Exemple : après la simulation d'une partie du moteur on peut directement avoir accès à :

- La force électromagnétique de Lorentz $\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$.
- Les données magnétiques.
- Les données électriques.
- Etc.

Bibliographie

- Hervé Oudin, Méthode des éléments finis, 2008.
- Documentation COMSOL MULTIPHYSICS® 3.5a